

C-1 유한요소법에 의한 축대칭장 문제의 해석

장임규, 곽동수, 신홍교
경상대학교

The Analysis of Axisymmetric Field Problem by C-1 FEM

I.K. Jang, D.S. Kwak, H.K. Shin
Dept. of Electrical Engineering, Gyeongsang National Univ.

Abstract - In this paper, the analysis of the electric field in the chamber of high voltage SF₆ GCB(Gas Circuit Breaker) is presented by using C-1 FEM.

For this purpose, pre-processing program and post-processing program were developed for axisymmetric 3 dimensional analysis and the electric field in cylindric chamber was analyzed.

Important problem is that electric analysis must be considered corona due to break-down of SF₆ when it is cutted off.

To solve this problem, a procedure is needed to verify that the solution of Poisson's equation for scalar potential satisfy charge continuous condition because of using first order element is not satisfy the electric continuous condition, C-1 FEM is introduce to obtain electric potential and electric field at the same time.

Analysis of the distribution of electric field on model was done.

It is confirmed that the developed program in this paper applicable to design and to analyze of characteristics in total program as electric characteristics analysis routine.

1. 서 론

최근 전기에너지 사용의 증가와 더불어 송전전압의 상승에 따라 전력용 차단기도 진공차단기에서 전력 차단능력이 우수한 SF₆ GCB(Gas Circuit Breaker)로 대체되는 추세에 있다. 이와 같은 SF₆ GCB의 차단특성에 관한 연구는 챔버내의 가스유동 및 열장해석에 치중되어 왔다. 그러나 가스차단기의 동작은 필연적으로 고전압, 고에너지 상태하에서의 전력의 차단과 투입의 반복이 이루어지는 고전압기기이므로 이의 동작 신뢰성분석을 위해서는 차단동작시의 차단기 챔버내의 전계분포를 정확히 알아야만 할 필요가 있다. 특히 차단기의 개발이나 설계에 있어서는 가장 난이한 부분인 차단접점의 형상설계를 위해서는 챔버내의 전계분포를 정확히 알아야만 접촉부 형상의 최적설계가 가능하다. 그런데 지금까지 주로 사용되어온 유한요소 전계해석 기법은 해석영역내의 전위의 연속조건만을 만족시키는 C-0 유한요소법이었다. 이로 인하여 해석영역내의 전계분포를 구하기 위해서는 전위의 미분연산이 추가로 필요할 뿐만 아니라 이렇게 구한 전계는 요소의 경계에서는 연속조건이 만족되지 않아 정확한 전계분포의 해석에는 미흡한 점이 많았다. 이에 따라 본 연구에서는 축대칭 절점에서의 포텐셜 및 그 미분을 모두 자유도(Degree of Freedom)로 갖는 C-1 유한요소법을 축대칭 3차원 장을 확장하여 전위 및 전계의 연속조건이 동시에 만족되고 공간전하 분포도 구할 수 있는 해석기법을 제안한다. 또한 이 기법의 타당성을 검토하기 위해 해석적 모델에 적용하여 C-0 유한 요소법에

의한 해석 결과와 비교 검토한다. 그리고 여기서 제한된 기법으로 SF₆ GCB 챔버내의 전계분포를 해석한다.

2. 지배방정식과 유한요소 정식화

2.1 지배방정식

전극 주위공간에서 코로나가 발생하고 있는 경우 코로나 발생 후에도 코로나전극표면의 전계의 세기는 초기치를 유지하며, 코로나 동작범위 즉, 이온화 영역의 두께는 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정하면 전극 주위공간에서의 전계 및 이온 흐름을 나타내는 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{J} = k \rho \mathbf{E} \quad (3)$$

여기서 \mathbf{E} 는 전계 [V/m], ρ 는 공간전하 밀도 [C/m^3], ϵ_0 는 자유공간(또는 공기)의 투자율, \mathbf{J} 는 이온전류밀도 [A/m^2], k 는 이동도 [$m^2/V \cdot s$], 그리고 σ 는 도전율 [$\Omega \cdot m$]이다. 또한 스칼라 포텐셜 ϕ 를 정의하면 전계 \mathbf{E} 는

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (4)$$

가 되면, 식(4)을 식(1)에 대입하면

$$-\nabla \cdot \nabla \phi = \rho / \epsilon_0 \quad (5)$$

와 같은 전위에 관한 Poisson 방정식이 얻어진다. 또한 식(3), (4)을 식(2)에 대입하면

$$-\nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = 0 \quad (6)$$

가 얻어진다. 식(6)을 다시 쓰면

$$-\nabla \cdot (\rho \nabla^2 \phi) = -(\nabla \rho \cdot \nabla \phi + \rho \nabla^2 \phi) = 0 \quad (7)$$

이므로 이에 식(5)를 대입하면

$$\nabla \rho \cdot \nabla \phi = \rho^2 / \epsilon_0 \quad (8)$$

이 구해진다.

식(5)과 식(8)의 해를 구하기 위한 경계조건은 다음과 같다.

1) 전극 e_i 에서의 포텐셜은 주어진다.

$$\psi(e_i) = V_i \quad (9)$$

2) 접지전극 e_n 은 기준 전극으로 삼는다.

$$\psi(e_n) = 0 \quad (10)$$

3) 코로나 전극표면의 전계는 초기치 E_0 를 유지한다.

2.2 포텐셜의 근사화

축대칭 3차원 장에서는 원통좌표계를 적용하면 $\psi \neq \psi(\phi)$ 이므로 식(5)는

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\rho / \epsilon_0 \quad (11)$$

가 된다. 식(11)을 유한요소법에 의해 풀기 위해 해석영역을 그림1과 같이 9개의 D.O.F.(degree of freedom)을 갖는 삼각요소로 분할하면 각 요소의 계변수 행렬은 다음과 같다.

$$\{\psi\}^e = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_{1r}, \psi_{2r}, \psi_{3r}, \psi_{1z}, \psi_{2z}, \psi_{3z}]^T \quad (12)$$

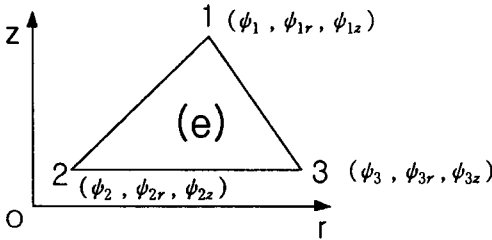


Fig. 1 Triangular element with 9 D.O.F.

여기서 ψ_i ($i = 1, 2, 3$)은 절점 i 의 포텐셜이며, ψ_{ir} , ψ_{iz} 는 각각 절점 i 에서의 포텐셜의 r , z , 방향 1계 도함수이다.

그런데 요소내부의 계변수의 변화는 한 요소당 9개의 D.O.F.를 가지므로 독립변수 r , z 에 대한 Pascal의 3차 완전 다항식으로 근사화 시키면 미지수가 10개가 존재하여 한 항을 소거시켜야 한다. 이와 같은 소거과정은 기하학적 등방성을 이용하거나 요소 내부의 중심 절점을 설정하여 연산과정에서 Condensation을 이용하는 방법 등이 있으나 요소형상이 직각삼각형인 경우 방정식이 Singular가 되거나 해가 수렴하지 않을 수도 있게 된다. 이에 따라 본 연구에서는 3차 면적좌표를 이용하여 계변수를 근사화 시키기로 한다. 그러면 요소내부의 계변수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \psi = & \alpha_1 L_1^3 + \alpha_2 L_2^3 + \alpha_3 L_3^3 + \alpha_4 L_1^2 L_2 + \alpha_5 L_1^2 L_3 \\ & + \alpha_6 L_2^2 L_3 + \alpha_7 L_2^2 L_1 + \alpha_8 L_3^2 L_1 + \alpha_9 L_3^2 L_2 \\ & + \alpha_{10} L_1 L_2 L_3 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서도 미지수가 $\alpha_1 \sim \alpha_{10}$ 과 같이 10개가 되므로 한 항을 소거해야 한다. 그런데 식 (13)에서 L_i^3 항은 각 절점에서의 포텐셜을 결정하는 항이며, $L_i^2 L_j$ 는 각 절점에서의 포텐셜에는 영향을 미치지 않으나 포텐셜의 미분치 즉, 전체의 r , z 방향성분을 결정하는 항이므로 소거시켜 수 없다. 마지막항 $L_1 L_2 L_3$ 는 각 절점의 포텐셜 및 도함수에는 영향을 주지 않고 요소내부에서의 변화에만 관

여한다. 따라서 이 항을 제거하면 요소내부의 포텐셜 및 도함수의 변화에 상당한 오차를 수반하게 된다. 따라서 본 연구에서는 이 항을 $L_i^2 L_j$ 항에 가중치로서 고려하

여 소거하였다. 즉 요소내부의 근사 포텐셜 $\tilde{\psi}^e$ 는

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^e = & L_1^3 \alpha_1 + L_2^3 \alpha_2 + L_3^3 \alpha_3 + (L_1^2 L_2 + W) \alpha_4 \\ & + (L_1^2 L_3 + W) \alpha_5 + (L_2^2 L_3 + W) \alpha_6 \\ & + (L_2^2 L_1 + W) \alpha_7 + (L_3^2 L_1 + W) \alpha_8 \\ & + (L_3^2 L_2 + W) \alpha_9 \\ = & [L] \{ \alpha \} \end{aligned} \quad (14)$$

가 된다. 여기서 L_i 는 면적좌표이며, W 는 가중치로서 $W = w L_1 L_2 L_3$ ($0 < w < 1$)이다. 식(14) 및 이를 r , z 에 대하여 1계 미분한 식을 이용하여 요소내에서의 계변수의 근사함수를 구하면

$$\tilde{\psi}^e = [N] \{ \psi \}^e \quad (15)$$

가 된다. 여기서 $[N]$ 은

$$\begin{aligned} N_i = & L_i^2 (3 - 2L_i) + 6W, \\ N_{i+3} = & L_i^2 (c_k L_j - c_j L_k) + (c_k - c_j) W, \\ N_{i+6} = & L_i^2 (b_j L_k - b_k L_j) + (b_j - b_k) W \end{aligned}$$

와 같이 주어지는 보간함수이다. 단, $i = 1, 2, 3$ 이며, j, k 는 순환수이다.

2.3 유한요소 정식화

식(11)을 유한 요소법을 풀기 위해 해석영역을 그림 1과 같은 요소로 분할하고 요소내에서의 ψ 를 식(15)으로 근사화한 후 Galerkin 이론을 적용하면 요소(e)에서의 잔차는

$$\begin{aligned} R^e = & -2\pi \int_{\Delta} \left\{ r \left(\frac{\partial N}{\partial r} \cdot \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{\partial N}{\partial z} \cdot \frac{\partial N}{\partial z} \right) \psi \right. \\ & \left. - \frac{\rho}{\epsilon_0} N r \right\} d\Delta^e \end{aligned} \quad (16)$$

가 된다. 이를 전요소에 대하여 조합하면

$$[C] \{ \psi \} = [F] \{ \rho \} \quad (17)$$

가 된다.

또한 식(8)은 축대칭 2차원 장의 경우에는

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho^2 / \epsilon_0 \quad (18)$$

이 된다.

공간전하분포를 고려한 전계해석에서는 식(5)과 식(8)을 동시에 만족하는 공간전하, 포텐셜 및 그 도함수를 구해야 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 다음과 같은 연산 알고리즘을 제안한다. 즉, 먼저 각 절점에서의 전하 ρ

및 그 도함수 $\frac{\partial \rho}{\partial r}$, $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ 를 가정, 식(17)에 대입하여

ψ , $\frac{\partial \psi}{\partial r}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ 를 구한 후 그 값이 식(18)을 만족하는지 확인한다. 만일 식(18)이 만족되지 않으면 최초로

가정한 ρ , $\frac{\partial \rho}{\partial r}$, $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ 중 2개는 그대로 사용하고 나

머지 한 항을 식(18)이 만족되는 값으로 수정하여 다시

식(17)에 대입하여 계산 결과를 구하는 과정을 ρ , $\frac{\partial \rho}{\partial r}$, $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ 이 순차적으로 수정되도록 반복하여 식 (17)과 식(18)이 동시에 만족되는 ψ , $\frac{\partial \psi}{\partial r}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, ρ , $\frac{\partial \rho}{\partial r}$, $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ 를 모두 구하는 방법을 제안한다. 이를 flow-chart로 나타낸 것이 그림 2이다.

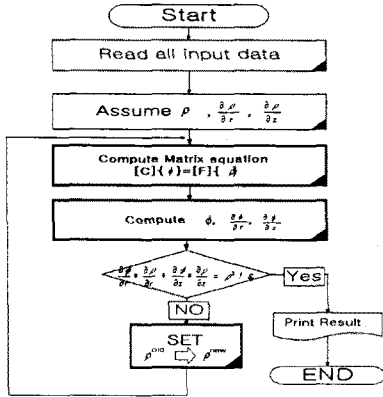


Fig. 2 Flow chart

3. 해석모델 및 결과

본 연구에서 제안된 알고리즘의 타당성을 입증하기 위하여 동축 원통 전극구조를 갖는 해석적 모델의 코로나 발생시 전계 및 전위분포를 해석하였다. 그림 3은 C-1 유한요소법을 적용하기 위한 요소 분할도이고, 그림 4는 C-0 유한요소법을 적용하기 위한 요소분할도로서 이 경우 미지절점수는 C-1 유한 요소법의 미지 변수 수와 같다. 그림 5는 각 방법에 따른 해석결과를 비교하기 위하여 $z=2[\text{cm}]$ 축상의 전계, 전위를 r 의 변화에 따라 나타 것이다.

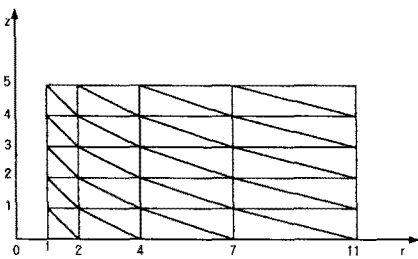


Fig. 3 요소분할도 1

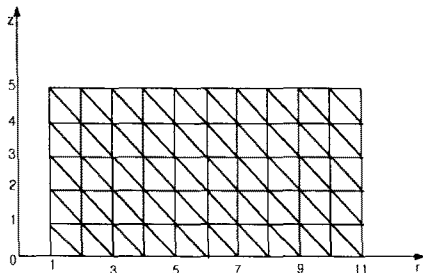


Fig. 4 요소분할도 2

이를 보면 포텐셜의 분포가 C-1 유한 요소법을 적용한 경우가 C-0 유한 요소법의 경우보다 정확하게 구해지며, 전계분포 또한 이론해에 근접한 매우 만족스러운 해석결

과를 보임을 알 수 있어, 본 연구에서 제안한 C-1 유한 요소법의 타당성을 입증할 수 있다.

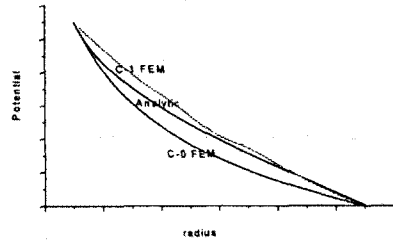


Fig. 5 반경에 따른 포텐셜 분포

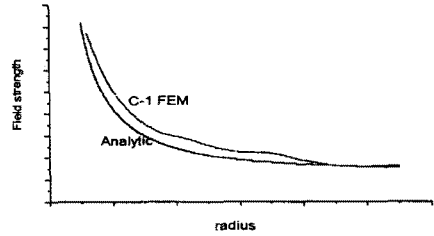


Fig. 6 반경에 따른 전계분포

또한 그림 7은 본연구에서의 계산 알고리즘을 이용하여 SF6 GCB 가스챔버 내부의 전계 및 전위 분포를 해석한 일례를 나타낸 것이다.

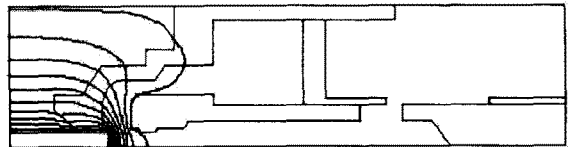


Fig. 7 Equipotential lines in GCB chamber model

4. 결 론

본 연구에서는 전위 및 그 미분을 포함하는 C-1 유한요소법을 2차원 축대칭 문제에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 미분연산 없이 영역내부의 전계를 직접 구하기 때문에 해의 오차가 작고, 신뢰성이 높은 전계 분포를 얻어진다.
2. 각 요소 사이의 연속성을 가진 전계 분포를 얻을 수 있다. 따라서 기존의 방법에 비해서 보다 상세하고 정확한 전계 분포를 파악할 수 있어 방전현상 또는 코로나 손실 등 중요한 전기력선을 구하는데 적용하면 유리하다.
3. 공간전하의 분포를 2차원 축 대칭장으로 확장했기 때문에 공간전하의 분포를 더욱 정확하게 계산할 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] W. Janischewskyj, and G. Gela, "Finite Element Solution for Electric Field of Coronating D.C. Transmission Lines" *IEEE Trans.* Vol. PAS-98, No. 3, pp. 1000-1012, 1979
- [2] M. Reggio, et al. "Computer Aided in Gas Circuit B Design." *IEEE Trans.*, Vol. PWRD-5, No.1, pp.16 1990

이 논문은 1998년도 경상대학교 연구장학재단 학술조성연구비 지원에 의한 연구의 일부임.