

2차원 다영역 문제의 경계적분 해석

임 의 수*, 이 향 범
 송실대학교 전기공학과

Analysis of Two-dimensional Multi-regions Problem
 Using Boundary Integral Equation Method

Eui-soo Lim*, Hyang-beom Lee
 Dept. of Electrical Eng. Soongsil Univ.

Abstract - This paper presents an analysis of 2-dimensional(2-D) multi-regions problem using boundary integral equation method(BIEM). When compared with finite element method(FEM), there are only a few unknown variables in BIEM because it implements numerical analysis only for the surface or boundary of a model. As a result, a lot of computational memory and time can be saved. Procedure to analyze 2-D multi-regions problem using potentials and its derivatives in a boundary as unknown variables, first, numerical analysis is performed for each of subregions. And then interface continuity condition is applied to the interface between them and Gauss Quadrature Formula are adopted to solve singular integral in a boundary in this paper.

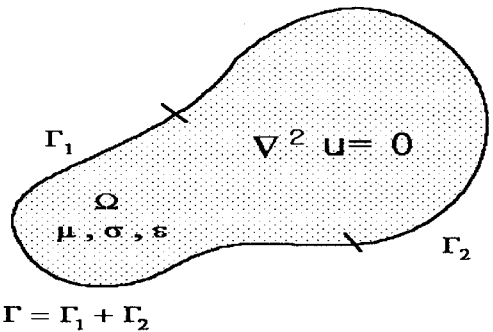


그림 1. 2차원 포텐셜 문제

1. 서 론

본 논문에서는 경계적분법을 이용한 2차원 다영역 문제를 해석하였다. 유한요소법의 경우 상대적으로 많은 미지수가 사용되지만 경계적분법에서는 주어진 해석대상의 경계나 표면에 대하여서만 요소분할이 수행되므로 유한요소법에 비하여 미지수가 현저히 감소하여 필요한 메모리 용량과 계산시간이 줄어들게 된다.

2차원 정전장계 문제가 단순영역이 아닌 서로 다른 두 개 이상의 매질로 이루어진 다영역 문제로 주어진 경우에는 부영역들의 경계상의 미지수 처리문제와 경계적분시 발생하는 특이적분의 계산문제가 매우 중요하다. 본 논문에서는 각각의 부영역들에 대하여 수치해석을 수행한 후 영역간의 경계에 경계연속조건(boundary continuity condition)을 적용시키고 특이적분을 수행하였으며 수치해석 예제를 통하여 해석알고리즘을 검증하였다.

2. 2차원 경계적분 정식화

Laplace 방정식이나 Poisson 방정식과 같은 미분 방정식들에 대한 경계적분 정식화 과정은 그들의 Green 함수나 기본해에 의해서 구별되어지며 다음의 과정을 통하여 정식화된다.

먼저 그림 1에서의 지배방정식인 Laplace 방정식은

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

이 되고 여기에 가중 잔차법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} w(\nabla^2 u) d\Omega = 0 \quad (2)$$

Green의 두 번째 정리에 의하여 식(1)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Omega} u \nabla^2 w d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (3)$$

가중함수의 해로서 Dirac-Delta 함수를 대입하면 식(1)은 다음과 같이 되고

$$u_i = \int_{\Gamma} G^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial G^*}{\partial n} d\Gamma \quad (i \in \Omega) \quad (4)$$

따라서 최종수식은 다음과 같이 얻어진다.

$$c_i u_i = \int_{\Gamma} G^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial G^*}{\partial n} u d\Gamma \quad (5)$$

$$c_i = \begin{cases} 1 & \vec{r} \in \Omega \\ 1/2 & \vec{r} \text{ on smooth boundary} \\ 0 & \vec{r} \notin \Omega \end{cases}$$

여기서 G^* 는 식(1)의 기본해이며 각각의 지배방정식에 따라서 표 1과 같이 나타난다.

표 1에 나타난 바와 같이 2차원 정전계 및 정자계 문제는 Laplace 또는 Poisson 방정식을 지배방정식으로 하며 그에 따른 기본해로서 LOG 함수를 사용한다.

따라서 기본해 G^* 는

$$G^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (6)$$

표 1. 전자기 문제에 따른 기본해

전자기문제	지배방정식	2차원	3차원
교류자장	Helmholtz	$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(\beta r)$	$\frac{1}{4\pi r} e^{-j\beta r}$
정전기학 정자기학	Laplace or Poisson	$\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$	$\frac{1}{4\pi r}$

※ $H_0^{(2)}(\beta r)$: zero-차의 제3종 Bessel 함수
 또는 zero-차의 제2종 Hankel 함수
 β : 복소상수 $\beta = \sqrt{-j\mu\omega\sigma}$
 r : source point와 field point간의 거리

이고 그에 따른 미분값인 $\frac{\partial G^*}{\partial n}$ 은

$$\frac{\partial G^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\hat{r} \cdot \vec{n}}{r} \quad (7)$$

이 된다.

경계적분 정식화를 통해 얻어진 최종수식은 각각의 요소에 대하여 다음의 행렬식으로 표현 가능하다.

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_{ij} = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_{ij} \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_{ij} = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_{ij} \quad (9)$$

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{when } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + c_i & \text{when } i = j \end{cases}$$

위와 같이 얻어진 최종 계 행렬식은 결국 다음과 같이 일반화된다.

$$HU = GQ \quad (10)$$

식 (10)은 각각의 부영역들에 주어진 경계조건을 적용 시킴으로써 다음과 같이 변형하여 행렬식을 쉽게 풀 수 있다.

$$AY = F \quad (11)$$

3. 특이적분

경계적분 정식화 과정을 통하여 얻어진 최종수식에서 r 이 zero인 경우, 즉 source point와 field point가 같은 경우에는 계산이 불가능해진다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위해 서로 다른 세 가지 경우에 대해서 고려해 주어야 한다. 첫 번째, source point와 field point가 다른 경우, 두 번째, source point와 field point가 같은 요소 내에 있으나 서로 같지 않은 경우, 세 번째, source point와 field point가 같은 요소 내에 있고 서로 같은 경우에 대해서 모두 고려해 주어야 한다.

적분식의 계산은 그림 2에서와 같이 Gaussian Quadrature Formula를 사용하며 위에서 고려한 세 경우에서 앞의 두 경우는 Standard Gaussian Quadrature Formula를 사용하고 마지막 경우에 대해서는 LOG-Weighted Gaussian Quadrature Formula를 사용한다.

각각의 계산과정은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (12)$$

$$(a) \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_{ga}} f(x_{g,i}) w_{g,i} \quad (13)$$

$$(b) \int_0^1 f(\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi = \sum_{i=1}^{n_{log}} f(x_{g,i}) w_{g,i} \quad (14)$$

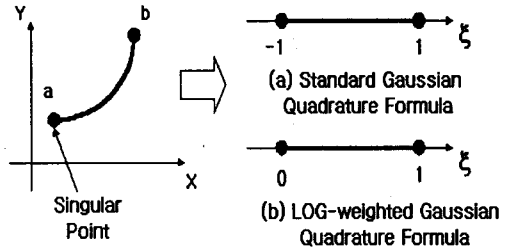


그림 2. Gaussian Quadrature Formula를 위한 좌표계의 변환

4. 다영역 문제

그림 3과 같이 2차원 포텐셜 문제가 1개의 매질로 이루어진 단순영역 문제가 아닌 서로 다른 2개 이상의 매질로 이루어진 다영역 문제로 주어진 경우에는 먼저 각각의 부영역들에 대하여 수치해석을 수행하고 영역 사이의 경계 상에 경계연속조건을 적용시킴으로써 문제를 해결할 수 있다.

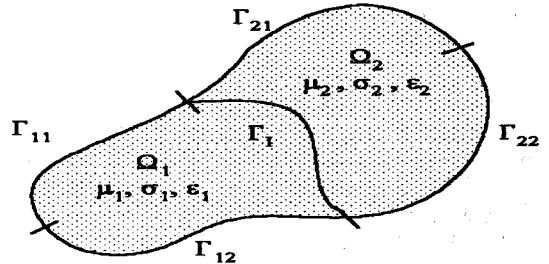


그림 3. 해석영역

부영역들에 대한 수치해석은 식 (10)을 이용하여 각각 다음과 같이 이루어진다.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{1l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{1l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{1l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{1l} \end{bmatrix} \quad \text{for } \Omega_1 \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} H_{21} & H_{22} & H_{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \\ U_{2l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{21} & G_{22} & G_{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{21} \\ Q_{22} \\ Q_{2l} \end{bmatrix} \quad \text{for } \Omega_2 \quad (16)$$

경계연속조건은 서로 다른 물질 사이에서의 자계의 접선성분과 법선성분에 대한 경계조건을 이용한다. 즉,

$$U_{1l} = U_{2l} \quad (17)$$

$$\frac{1}{\mu_1} Q_{1I} = -\frac{1}{\mu_2} Q_{2I} \quad (18)$$

식(18)에서의 음의 부호는 부영역들 간의 경계에서의 외향법선 성분은 반대방향을 나타내기 때문이다. 따라서 최종 계 행렬식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{1I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{2I} & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_I \\ U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu_2/\mu_1)G_{2I} & G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_I \\ Q_{21} \\ Q_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

(μ_1, μ_2 : 각각의 부영역들에서의 물질상수)

위 식에 각각의 부영역들에 주어진 경계조건들을 대입 시킴으로써 식 (11)과 같은 형태의 행렬식으로 변형하여 풀 수 있다.

5. 해석적응사례

해석적응 모델은 2차원 다영역 포텐셜 문제로서 그림 4와 같이 각각 유전율 2.0(영역 I)과 1.0(영역 II)을 가지는 유전체로 이루어진 $1m \times 1m$ 캐패시터 모델이다. 각 부영역들에서의 절점번호와 경계요소번호가 나타나 있으며 경계조건은 표 2와 같이 주어진다.

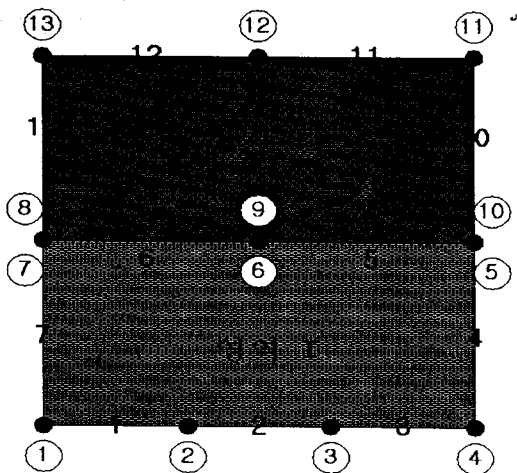


그림 4. 2차원 다영역 문제 해석예

표 2. 경계조건

경계요소번호	절점번호 : 경계값	
1	① : 0.0 V	② : 0.0 V
2	② : 0.0 V	③ : 0.0 V
3	③ : 0.0 V	④ : 0.0 V
11	⑪ : 200.0 V	⑫ : 200.0 V
12	⑫ : 200.0 V	⑬ : 200.0 V

표 3은 해석모델에 수치해석 결과를 나타내고 있다.

표 3. 수치해석 결과

경계요소번호	절점번호 : 포텐셜값	
1	①: 0.000000	②: 0.000000
2	②: 0.000000	③: 0.000000
3	③: 0.000000	④: 0.000000
4	④: 0.000000	⑤: 66.666680
5	⑤: 66.666680	⑥: 66.666700
6	⑥: 66.666700	⑦: 66.666600
7	⑦: 66.666600	①: 0.000000
8	⑧: 66.666630	⑨: 66.666790
9	⑨: 66.666790	⑩: 66.666590
10	⑩: 66.666590	⑪: 200.000000
11	⑪: 200.000000	⑫: 200.000000
12	⑫: 200.000000	⑬: 200.000000
13	⑬: 200.000000	⑦: 66.666630

6. 결 론

본 논문에서는 2차원 정전자계 다영역 문제를 경계적분법을 이용하여 해석하였다. 기존의 해석이론을 바탕으로 컴퓨터 프로그래밍을 하였으며 수치해석을 수행한 결과 만족스런 결과를 얻었다. 이 결과를 토대로 하여 유한요소법과 같은 다른 해석방법을 같은 문제에 적용하여 얻은 결과와의 비교를 통해 본 연구의 타당성을 검증할 수 있으리라 사료되며 2차원 뿐 아니라 3차원 문제에도 적용하여 좋은 결과를 얻을 수 있으리라 사료된다.

(참 고 문 헌)

- [1] A. A. Becker, *The Boundary Element Method in Engineering*, McGraw-Hill, 1992
- [2] T. Rudolph and V. Peterson, "A Modular Program for Poisson's Equation with Linear Boundary and Domain Elements", *Adv. Eng. Software*, Vol.9, No.1, 1987
- [3] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Inc., 1985
- [4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, 1992
- [5] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, 1984
- [6] Sompoth Peaiyoung, "Computational Aspects of The Boundary Element Method Applied to Two- and Three- Dimensional Magnetic Field Problems", Rensselaer Polytechnic Institute, 1987