1999년도 대한전기학회 정기총회 및 추계학술대회 논문집 1999. 11. 20

부등호 제약조건의 등호제약조건화를 통한 OPF해석 알고리즘

최장흠*, 김건중*, 전동훈**, 임종호*, 이병일*, 한현규*
*충남대학교, **한전전력연구원

OPF Algorithm of changing inequality constraint to equality constraint

J.H.Choi*, K.J.Kim*, D.H.Jeon**, C.H.Rhim*, B.RLee*, H.G.Han*
*Chungnam National Univ. **KEPRI

Abstract - This paper deals with optimal power flow, which is optimal problem with equality constraint and inequality constraint. A algorithm of changing two constraints problem to one constraint - equality constraint problem - that make it analytical access for optimal power flow is presented.

1. 서 론

1950년대 후반 조류 계산 프로그램이 실용화된 이후에 경제급전 문제의 연장선상에서 최적조류계산문제가 대두되었다. 특히 최근 전력 산업의 구조개편에 따라 최적조류계산은 계통운용의 기본적인 수단으로 새로이 자리 매김하고 있다. 이러한 최적조류계산은 기술적, 물리적, 환경적 제약조건하에서 최소비용으로 전력계통을 운용하기 위한 해를 찾는 문제로써 등호제약조건과 부등호 제약조건을 가지는 비선형 최적화 문제이다.

최적조류계산의 해석방법에는 LP(linear programming), RGM(reduced gradient method), quasi-Newton법 등이 있다. 하지만 이러한 방법들에서 최적조류계산을 구성하는 부등호 제약조건에 대한 처리가 용이하지 않다. 특히 부등호 제약조건들 중에서 active constraint만을 정확히 분리하여 문제를 재구성하는 것이 정확한 최적조류계산의 해를 구하는데 많은 어려움을 주고 있다.

본 논문에서는 등호제약조건과 부등호 제약조건을 가지는 비선형 최적화 문제인 최적조류계산을 등호제약조건만을 가지는 최적화 문제로 변환하여 최적조류계산에 대한 해석적 접근이 가능하도록 하는 알고리즘을 제시하였다. 이러한 알고리즘을 통해 부등호 제약조건 중에서 active constraint만을 따로 분리하여 문제를 재구성하는 번거로움 없이 계통에 대한 정확한 최적조류계산의 해를 구할 수 있음을 제시된 알고리즘을 통해 증명하였다.

2. 본 론

2.1 OPF 문제의 정식화

전력계통은 전압과 주파수의 변동이 적고 정전이 없는 양질의 전력을 수용가에 공급하는 것을 목적으로 하고 있는데 전기 에너지를 저장할 수 있는 기능을 가지고 있지 않으므로 발전기에서 공급한 전력을 그때 그때 수용가의 부하에서 소비하거나 선로손실의 형태로 소비하게 된다. 그런데 총 발전설비용량은 부하보다 많은 것이 일반적이므로 선로손실을 포함하여 필요한 만큼의 부하전력을 공급하기 위하여 일부 발전기는 정격이하의 출력으로 운전하거나 정지상태에 있기도 한다.

이때 필요한 만큼의 전력을 공급하기 위하여 어느 발전기에 얼마만큼의 출력을 배분하여 총 발전비용을 최소화시킬 것인가, 또 선로손실을 어떻게 하면 최소화시킬 수 있는가 하는 문제가 대두되는데 주어진 계통의 조건에서 이러한 문제들을 풀기 위하여 최적조류계산이 행해지게 된다. 다시말해, 최적조류계산이란 계통의 주어진 조건, 즉 계통의 안정도 유지조건, 물리적 제약조건, 전압유지조건등을 만족시키면서 발전비용이나 선로손실을 최소화시키는 것을 목적으로 한다. 따라서 최적조류계산 문제는 식 (1)과 같이 몇가지의 제약조건을 가지면서 발전연료비함수를 최소화시키는 비선형 문제로 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & f(P_G) = \mathbf{b_G}^T \cdot \mathbf{P_G} + \tfrac{1}{2}\mathbf{P_G}^T \cdot C_G \cdot \mathbf{P_G} \\
\text{s.t} \quad & \mathbf{P_B} - \mathbf{A_{PG}} \cdot \mathbf{P_G} + \mathbf{P_D} = 0 \\
& \mathbf{Q_B} - \mathbf{A_{QG}} \cdot \mathbf{Q_G} + \mathbf{Q_D} = 0 \\
& \theta_s = 0 \\
& \mathbf{P_{GL}} \le \mathbf{P_G} \le \mathbf{P_{GH}} \\
& \mathbf{Q_{GL}} \le \mathbf{Q_G} \le \mathbf{Q_{GH}} \\
& \mathbf{V_L} \le \mathbf{V} \le \mathbf{V_H}
\end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)은 등호제약조건과 부등호제약조건을 가지는 최적화문제이다. 따라서 위의 문제는 등호제약조건에 대해서만 라그란지안 쌍대 함수를 구성해 해를 구한 뒤 그 해가 부등호제약조건에 대해 feasible 영역이면 종료하고 infeasible 영역이면 complementary slackness condition을 만족하도록 라그란자안 쌍대 함수에

$$\mu^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2}$$

을 추가한다. 이때 upper limits보다 큰 부등호제약조건에 대해서

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x_H} \tag{3}$$

이고 lower limits보다 작은 부등호 제약조건에 대해서

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + \mathbf{x_L} \tag{4}$$

이다.

이와 같이 주어진 문제에 대한 초기해가 주어진 문제의 부등호제약조건에 대해 infeasible한 경우가 발생하면 부등호제약조건의 경계조건이 활성화되는 active constraint만을 따로 분리하여 식 (2)와 같은 형태로 라그란지안 쌍대함수에 추가하여 문제를 해석하는 과정이 모든 부등호제약조건을 만족하는 해를 찾을때까지 반복되어야 한다.

2.2 부등호제약조건의 등호제약조건화

식 (1)에서 upper limits와 lower limits를 가지는 부등호 제약조건을 upper limits만을 가지는 부등호 제약조건으로 변환하면 부등호 제약조건 부분은

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P_G} &\le \mathbf{P_{GH}} \\
-\mathbf{P_G} &\le -\mathbf{P_{GL}} \\
\mathbf{Q_G} &\le \mathbf{Q_{GH}} \\
-\mathbf{Q_G} &\le -\mathbf{Q_{GL}} \\
\mathbf{V} &\le \mathbf{V_H} \\
-\mathbf{V} &\le -\mathbf{V_L}
\end{aligned} \tag{5}
$$

이 된다. 이때 식 (5)에서 부등호 제약조건의 우변을 좌변으로 이항하면 부등호 제약조건은 전부 0을 upper limits로 가지게 된다. 이때 좌변의 식을 $\mathbf{g}$라 하고 $\mathbf{g}$의 각 원소에 0보다 크거나 같은 값 $y_i^2/2$을 더해준 방정식

$$\mathbf{g}+\frac{1}{2}[\mathrm{y}]\mathbf{y}=0 \tag{6}$$

이 있다고 한다면 $g_i=-y_i^2/2$ 이고 $y_i^2/2$ 는 0보다 크거나 같으므로 결과적으로 식 (6)은 $g_i\le 0$와 같다. 따라서 $\mathbf{g}\le 0$와 같이 0을 upper limits로 가지는 부등호 제약조건은 식 (6)과 같이 변환할 수 있다. 따라서 식 (1)에서 부등호 제약조건을 위와 같은 방법으로 등호제약조건으로 변환하면 식 (7)와 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & f(\mathbf{P_G})=\mathbf{b_G}^T\cdot\mathbf{P_G}+\frac{1}{2}\mathbf{P_G}^T\cdot C_G\cdot\mathbf{P_G} \\
\text{s.t} \quad & \mathbf{P_B}-A_{PG}\cdot\mathbf{P_G}+\mathbf{P_D}=0 \\
& \mathbf{Q_B}-A_{QG}\cdot\mathbf{Q_G}+\mathbf{Q_D}=0 \\
& \theta_s=0 \\
& \mathbf{P_G}-\mathbf{P_{GH}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{PH}}]\mathbf{y_{PH}}=0 \\
& -\mathbf{P_G}+\mathbf{P_{GL}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{PL}}]\mathbf{y_{PL}}=0 \\
& \mathbf{Q_G}-\mathbf{Q_{GH}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{QH}}]\mathbf{y_{QH}}=0 \\
& -\mathbf{Q_G}+\mathbf{Q_{GL}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{QL}}]\mathbf{y_{QL}}=0 \\
& \mathbf{V}-\mathbf{V_H}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{VH}}]\mathbf{y_{VH}}=0 \\
& -\mathbf{V}+\mathbf{V_L}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{VL}}]\mathbf{y_{VL}}=0
\end{aligned} \tag{7}
$$

2.3 등호제약조건화한 OPF의 해석

식 (7)에서 주어지는 최적화문제를 라그란지안 쌍대함수로 변환하면

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{z})\equiv f(\mathbf{P_G}) &+ \boldsymbol{\lambda_P}^T\cdot\{\mathbf{P_B}-A_{PG}\cdot\mathbf{P_G}+\mathbf{P_D}\} \\
&+ \boldsymbol{\lambda_Q}^T\cdot\{\mathbf{Q_B}-A_{QG}\cdot\mathbf{Q_G}+\mathbf{Q_D}\} \\
&+ \lambda_\theta\cdot\mathbf{1}_s^T\cdot\boldsymbol{\theta} \\
&+ \boldsymbol{\mu_{PH}}^T\cdot\left\{\mathbf{P_G}-\mathbf{P_{GH}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{PH}}]\mathbf{y_{PH}}\right\} \\
&+ \boldsymbol{\mu_{PL}}^T\cdot\left\{-\mathbf{P_G}+\mathbf{P_{GL}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{PL}}]\mathbf{y_{PL}}\right\} \\
&+ \boldsymbol{\mu_{QH}}^T\cdot\left\{\mathbf{Q_G}-\mathbf{Q_{GH}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{QH}}]\mathbf{y_{QH}}\right\} \\
&+ \boldsymbol{\mu_{QL}}^T\cdot\left\{-\mathbf{Q_G}+\mathbf{Q_{GL}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{QL}}]\mathbf{y_{QL}}\right\} \\
&+ \boldsymbol{\mu_{VH}}^T\cdot\left\{\mathbf{V}-\mathbf{V_H}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{VH}}]\mathbf{y_{VH}}\right\} \\
&+ \boldsymbol{\mu_{VL}}^T\cdot\left\{-\mathbf{V}+\mathbf{V_L}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{VL}}]\mathbf{y_{VL}}\right\}
\end{aligned} \tag{8}
$$

이다. 그리고 위의 문제에 대한 최적조건식은

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{P_G}}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P_G}}-A_{PG}{}^T\cdot\boldsymbol{\lambda_P}+\boldsymbol{\mu_{PH}}-\boldsymbol{\mu_{PL}}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q_G}}=-A_{QG}{}^T\cdot\boldsymbol{\lambda_Q}+\boldsymbol{\mu_{QH}}-\boldsymbol{\mu_{QL}}=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}}=\left(\frac{\partial \mathbf{P_B}}{\partial \mathbf{V}}\right)^T\cdot\boldsymbol{\lambda_P}+\left(\frac{\partial \mathbf{Q_B}}{\partial \mathbf{V}}\right)^T\cdot\boldsymbol{\lambda_Q}+\boldsymbol{\mu_{VH}}-\boldsymbol{\mu_{VL}}=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}}=\left(\frac{\partial \mathbf{P_B}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^T\cdot\boldsymbol{\lambda_P}+\left(\frac{\partial \mathbf{Q_B}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^T\cdot\boldsymbol{\lambda_Q}+\mathbf{1}_s\cdot\lambda_\theta=0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda_P}}=\mathbf{P_B}-A_{PG}\cdot\mathbf{P_G}+\mathbf{P_D}=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda_Q}}=\mathbf{Q_B}-A_{QG}\cdot\mathbf{Q_G}+\mathbf{Q_D}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_\theta}=\theta_s=0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y_{PH}}}=[\mathrm{y_{PH}}]\cdot\boldsymbol{\mu_{PH}}=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y_{PL}}}=[\mathrm{y_{PL}}]\cdot\boldsymbol{\mu_{PL}}=0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y_{QH}}}=[\mathrm{y_{QH}}]\cdot\boldsymbol{\mu_{QH}}=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y_{QL}}}=[\mathrm{y_{QL}}]\cdot\boldsymbol{\mu_{QL}}=0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y_{VH}}}=[\mathrm{y_{VH}}]\cdot\boldsymbol{\mu_{VH}}=0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y_{VL}}}=[\mathrm{y_{VL}}]\cdot\boldsymbol{\mu_{VL}}=0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu_{PH}}}=\mathbf{P_G}-\mathbf{P_{GH}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{PH}}]\mathbf{y_{PH}}=0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu_{PL}}}=-\mathbf{P_G}+\mathbf{P_{GL}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{PL}}]\mathbf{y_{PL}}=0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu_{QH}}}=\mathbf{Q_G}-\mathbf{Q_{GH}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{QH}}]\mathbf{y_{QH}}=0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu_{QL}}}=-\mathbf{Q_G}+\mathbf{Q_{GL}}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{QL}}]\mathbf{y_{QL}}=0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu_{VH}}}=\mathbf{V}-\mathbf{V_H}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{VH}}]\mathbf{y_{VH}}=0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu_{VL}}}=-\mathbf{V}+\mathbf{V_L}+\frac{1}{2}[\mathrm{y_{VL}}]\mathbf{y_{VL}}=0 \tag{27}$$

와 같다.

따라서 2.2절에서 변환된 OPF 문제에 대한 해를 찾기 위한 필요충분조건은 위에 주어지는 최적조건식에 대한 해를 찾는 것이므로 최적조건식에 대해 뉴톤랍손법을 이용하면

$$[H]\triangle \mathbf{z}=\triangle G(\mathbf{z}) \tag{28}$$

가 된다. 단 이때 계수 행렬은

$$[\mathrm{H}]=\begin{bmatrix} [\mathrm{F}] & [0] & [\mathrm{G}]^T \\ [0] & [\mu] & [\mathrm{y}] \\ [\mathrm{G}] & [\mathrm{y}] & [0] \end{bmatrix} \tag{29}$$

이 된다. 여기서 행렬 [F]는

$$[\mathrm{F}]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial S_G^2} & [0] & -[A_G] & \mathbf{0} \\ [0] & [\mathrm{H}] & [\mathrm{J}]^T & \mathbf{1}_s \\ -[A_G] & [\mathrm{J}] & [0] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_s^T & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

으로써 자코비안과 헤시안 그리고 비용함수에 대한 2차 편미분행렬, 그리고 발전기의 연결관계를 나타내는 접속행렬로 구성되는 행렬이다. 그리고 계수 행렬에서 $[\mu]$와 $[\mathrm{y}]$는 변수 μ와 $\mathbf{y}$로 구성되는 대각행렬이며 [G]는 단위행렬로 구성되는 부분행렬이다.

따라서 행렬의 크기는 부등호제약조건 3배만큼 늘어나지만 active constraint를 따로 분리하여 문제를 재구성할 필요 없이 1번의 계산만으로 해를 찾을 수 있다.

2.4 사례연구

본 사례연구에서는 IEEE 14-bus 샘플 계통에 대해 본 알고리즘을 적용하였다. 이때 발전기의 비용함수와 발전력의 상하한치는 [표 1]과 같이 결정하였으며 각 모선에서 부하량과 전압의 상하한치는 [표 2]와 같다.

[표 3]은 본 논문에서 제시한 알고리즘에 대한 수렴특성을 나타내고 있으며 [표 4]는 OPF수행 후 발전력 배분 상태를 나타내고 [표 5]는 OPF수행 후 각 모선의 전압 상태를 나타내고 있다.

[표 4]에서 볼 때 [표 1]에서 발전비용이 비싼 1002번, 1003번, 1006번의 발전기는 최소발전을 하고 발전비용이 싼 1001번과 1008번 중에서 가장 값이 싼 1008번은 최대발전을 하고 1001번 발전기가 나머지 부하와 감당하고 있다. 이와 같은 상태는 실제의 상황과도 일치함을 알 수 있으며 본 논문에서 제시한 알고리즘에 의한 OPF해석이 가능함을 증명하고 있다.

[표 1] 발전기 입력데이터

발전기 모선번호	비용함수 2차항계수	비용함수 1차항계수	비용함수 상수항	발전력 상한치	발전력 하한치
1001	0.002	5	80	3	1
1002	0.004	7	40	1	0.5
1003	0.006	9	10	0.5	0.2
1006	0.007	9	10	0.5	0.2
1008	0.005	4	60	0.5	0.2

[표 2] 모선 입력 데이터

모선번호	유효전력	무효전력	전압상한치	전압하한치
1001	0.0000	0.0000	1.2000	0.8000
1002	0.2170	0.1270	1.2000	0.8000
1003	0.9420	0.1900	1.2000	0.8000
1004	0.4780	-0.0390	1.2000	0.8000
1005	0.0760	0.0160	1.2000	0.8000
1006	0.1120	0.0750	1.2000	0.8000
1007	0.0000	0.0000	1.2000	0.8000
1008	0.0000	0.0000	1.2000	0.8000
1009	0.2950	0.1660	1.2000	0.8000
1010	0.0900	0.0580	1.2000	0.8000
1011	0.0350	0.0180	1.2000	0.8000
1012	0.0610	0.0160	1.2000	0.8000
1013	0.1350	0.0580	1.2000	0.8000
1014	0.1490	0.0500	1.2000	0.8000

[표 3] 수렴특성

No.	MaxError	MaxNode
1	19.8384	4
2	33.2202	4
3	6.6759	77
4	1.26232	73
5	0.732676	73
6	0.303685	52
7	0.108164	52
8	0.839338	1
9	0.876248	1
10	0.549267	6
11	0.199268	6
12	0.0771799	6
13	0.0224919	56
14	0.00781282	42
15	0.00253461	56
16	8.67238e-005	57
17	1.25722e-006	3
18	1.0831e-008	3
19	2.11635e-010	8
20	3.95772e-012	8

[표 4] OPF 수행후 발전력 배분 상태

발전기 모선번호	유효전력	무효전력
1001	1.22985	0.0202033
1002	0.5	0.143238
1003	0.2	0.188754
1006	0.2	-0.06
1008	0.5	0.00236181

[표 5] OPF 수행후 각 모선의 전압 상태

모선번호	전압의 크기	전압의 위상각
1001	1.2	0
1002	1.18697	-0.033876
1003	1.16252	-0.106944
1004	1.16831	-0.074948
1005	1.1682	-0.062247
1006	1.2	-0.094992
1007	1.19311	-0.064314
1008	1.19117	-0.002302
1009	1.19567	-0.097288
1010	1.18998	-0.100833
1011	1.19201	-0.099736
1012	1.18739	-0.106186
1013	1.18392	-0.106855
1014	1.17475	-0.115075

3. 결 론

본 논문에서는 등호제약조건과 부등호제약조건을 가지는 최적화 문제인 최적조류계산을 등호제약조건만 가지는 최적화 문제로 변환하여 최적조류계산을 해석하는 기법을 제안하였다. 본 논문에서 제안된 방법에서는 행렬의 크기가 부등호제약조건의 개수의 3배만큼 늘어나지만 complementary slackness condition을 만족하도록 active constraint를 따로 고려할 필요 없이 1번만 라그란지안 쌍대함수에 대한 해석을 수행하면 되기 때문에 OPF에 대한 해석이 훨씬 용이할 것으로 사려된다. 또한 부등호제약조건을 등호제약조건으로 변환하면서 도입된 변수들은 부등호제약조건과 경계조건과의 거리를 나타내므로 발전여력이 대한 별도의 계산 없이도 계산과정에서 발전여력이 바로 도출될 수 있는 장점을 가지고 있다.

앞으로의 과제는 선로조류에 대한 부등호 제약조건을 고려한 최적조류계산의 수행과 분산처리기법을 이용한 최적조류계산의 수렴속도 개선에 있다고 하겠다.

[참 고 문 헌]

[1] Mokhtar. S. Bazaraa, "Nonlinear Programming", John Wiley & Sonss, Inc., 1979
[2] 김호웅, 박만근, 김발호, 김정훈, "최적조류계산 분산처리기법의 비교", 대한전기학회 하계학술대회 논문집, C권, pp. 1046-1048, 1999
[3] M.E.EL-HAWARY, "Optimal Economic Operation of Electric Power Systme", ACADEMIC PRESS, INC. 1979
[4] Allen J. Wood, Bruce F. Wollenberg, "Power Generation, Operation, And Control", John Wiley & Sonss, Inc., 1996