



난류계산모형의 현황과 전망

Present status and prospects of Computational Turbulence Models

정 명 균¹⁾

Myung Kyoon Chung

1. 서 론

CFD의 3대 요소라고 할 수 있는 격자생성기법, 수치해석 알고리즘과 난류계산모형 중에서 앞의 두가지는 수학적으로 매우 정밀한 이론과 사용에 편리한 기법들이 개발되었다. 그러나, 지난 30여년 동안 전 세계적인 관심하에 유능한 연구자들이 모든 역량을 기울이며 난류계산모형을 개발하여 왔음에도 불구하고 아직까지도 난류계산모형은 CFD의 신뢰도 향상에 아킬레스건으로 작용하고 있어서, 산업체에서 기계를 설계하고 공학적인 문제를 진단하거나 개선하는 일에 CFD를 유용하게 도입·사용하는데에 저해요인이 되고 있다. 물론 연소현상이나 화학종간의 상호반응, 열역학적인 유체성질의 변화, 기체-액체-고체상 물질의 혼재 등을 수반하는 복잡한 유동현상들도 아직까지 CFD에 어려운 문제를 제기하고 있기는 하지만, 설명이런 부수적 현상들의 물리적 이해를 완벽하게 한다고 하더라도 그 저변의 난류현상을 정확하게 묘사할 수 없으면 CFD의 모든 노력이 무의미하게 된다.

본 강연에서는 먼저 정확한 난류계산모형의 개발을 어렵게 하고 있는 난류 자체의 물리적인 현상을 간략하게 개관하고 현재 상용 CFD코드에 널리 사용되고 있는 2-방정식 모형의 문제점들을 지적한 후에 레이놀즈 스트레스 난류모형(RSM)을 CFD에 도입하는 경우에 고려하여야 할 사항들을 설명하고 마지막으로 RSM의 한계를 극복하기 위하여 최근에 Stanford에서 시도되고 있는 Structure-Based Model(SBM)의 기본 개념을 소개함으로써 난류계산모형의 나아갈 방향을 제시하고자 한다.

2. 난류유동의 특성

Navier-Stokes 방정식의 비선형성으로 인해서 서로 다른 파장과 축을 가진 난류에디(eddy)들이 상호작용을 하면서 독특한 유동 구조를 나타내고 있는 난류의 가장 중요한 특성 중의 하나는 난류운동을 지속하는데 필요한 운동에너지를 그 유동장의 경계거리와 그 크기를 거의 같이하는 에디들이 평균유동장의 운동에너지로부터 추출해서 그것을 자기보다 작은 난류에디들로 단계적으로 그 에너지를 전달해서 점성에 의해서 그 크기를 제한받는 가장 작은 에디(Kolmogoroff eddy)까지 이르면 이 최소 에디들간의 마찰에 의해서 난류운동에너지가 열에너지로 소산되어 없어진다. 이 난류운동에너지를 평균유동장으로부터 흡수하는 큰 규모의 에디들은 대부분의 난류운동에너지를 갖고 있으면서 운동량 전달과 난류용력의 대부분의 역할을 맡고 있는데 비해서 최소크기의 에디들은 큰 에디로부터 전달되어오는 난류운동에너지를 소산시켜 유동장의 평형을 유지해주는 중요한 역할을 하고 있다.

한편 속도장의 변동과 같은 정도의 주파수로 빠르게 변동하는 압력장은 유동장의 순간 변형율과 상호작용을 하면서 한 특정한 방향으로(2차원유동장의 경우를 예로 들면 난류운동에너지는 $\overline{u_1^2}$ 에 먼저 흡수된다) 들어오는 난류 운동에너지를 다른 방향들의 운동에너지(즉, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$)들로 재분배해서 유동장을 등방성 난류로 유도해주는 역할을 한다.

위의 압력장의 역할과는 달리 난류속도 자체간의 3차적 상호작용은 유동장의 어느 특정 지점에서 집중적으로 흡수되는(또는 생성되는) 난류운동에너지와 난류용력을 공간상 다른 지

1. 한국과학기술원 기계공학과 (305-706, 대전시 유성구 구성동 373-1, Tel : 042-869-3014)

점으로 전달하는 역할을 한다.

그리고 흔히 복합난류유동(complex turbulent flows, CTF)이란 말을 많이 쓰고 있는데 이에 대한 객관적인 정의는 되어 있지 않지만, Bradshaw의 기준에 따르면 유동장에 존재하는 변형율(rate of strain)이 벽에 직교한 속도구배(du/dy) 하나만 의미있는 크기를 갖는 단순 전단유동과는 달리 여러 가지 다른 형태의 변형율이 공존하고 이들에 의해서 난류응력과 난류운동에너지가 생성되는 경우를 CTF라고 하고 있다. 즉 $\partial u/\partial y$ 이외에 $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial z$, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial w/\partial z$ 등이 영이 아니고 또한 유선의 곡률이나 부력, 시스템 회전에 의한 Coriolis 힘 등으로 인하여 별도의 변형이 발생하는 난류유동장을 말한다. 특히 이런 별도의 변형은 그 크기가 비록 작더라도 난류구조와 전단응력 그리고 나아가서 평균유동장에 까지 지대한 영향을 미친다. 그 이유는 이들이 난류 운동에너지를 직접적으로 생성하며 또한 지배방정식에 외재적으로 나타나 있지는 않지만 난류수직응력간의 에너지 재분배와 공간상 전달에 관여하고 있기 때문이다.

따라서 난류계산모형이 구비하여야 할 기본적인 조건은 위의 4가지 난류의 기본 특성, 즉, 여러가지 다양한 종류의 난류의 생성과 난류수직응력간의 에너지 재분배, 난류운동에너지와 난류응력의 공간상 전달, 그리고 난류운동에너지의 열에너지로의 소산율을 정확하게 표현할 수 있어야 한다.

3. 2-방정식 와점성계수모형(Eddy viscosity model, EVM)

3.1 와점성계수모형의 결점

3.1.1 난류응력과 변형율의 주축이 다른 경우

난류유동장의 해석에 가장 중요한 가정은 난류응력과 평균변형율 사이의 관계에 대한 가정이다. 순수하게 수학적인 관점에서 이 관계를 구하는 방법은 난류응력을 평균변형율에 대한 Taylor급수 전개를 하는 것으로써 Lumley(1970)와 Saffman(1976)은 난류응력텐서의 성질과, 실험에서 관찰한 난류수직응력 성분간의 비례, 그리고 균질 회전유동의 성질등을 고려하여 다음과 같이 구하였다.

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_T S_{ij} - D \frac{k}{\omega^2} (S_{ij} \Omega_{ij} + S_{jk} \Omega_{ki})$$

그러나, 2-방정식 와점성계수모형(EVM)에서는 상기 표현에서 평균변형율에 대한 1차항까지 취한 다음 식을 기본 구성방정식(constitutive equation)으로 사용하고 있다.

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_T S_{ij}$$

위의 두 식을 비교해 보면 난류응력텐서가 평균변형율의 주축방향과 다른 경우에 EVM의 가장 큰 결점이 나타날 것임을 알 수 있다. 이러한 경우의 대표적인 예는 응력으로 유발되는 2차유동이 존재하는 경우로써 각이 진 관유동의 구석 근방에서 일어나는 2차유동이다.

3.1.2 난류응력의 memory effect

두 번째 문제는 난류응력의 memory effect로부터 발생한다. 난류유동장에 단순전단변형율뿐만 아니라 유선곡률이나 시스템 회전 등에 의한 2차 변형이 존재하는 경우에 난류응력이 상류로부터 이어받은 응력 값을 그대로 유지한 채 그 위치에서의 2차적인 변형율에 의한 응력을 집적시키기(cumulative) 때문에 난류응력은 더 이상 국부적인 변형율에만 의존하지 않는다. Fig.1은 90도 곡관에서 중심선을 따라 난류응력이 변화해 가는 것을 보여주고 있다(임효재, 1995). 여기서 τ_c 는 곡관 입구로부터 걸린 시간을 나타낸다. 유선 곡률이 안정적일 때는 ($S_c > 0$) 하류로 내려가면서 난류전단응력과 국소변형율사이의 비례상수인 C_μ 가 감소하고 불



안정적일 때는($S_c < 0$) 증가함을 알 수 있다. 이와 같은 memory effect를 비선형 구성방정식으로 표현하기 위해서 Speziale(1987)은 다음과 같은 변형율의 Oldroyd 도함수를 도입하여 memory effect를 포함시키도록 하였지만 수치적으로 만족할 만한 결과는 얻지 못하였다.

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + U_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} S_{kj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} S_{ki}$$

여기서 오른쪽의 처음 두 항들은 상류로부터 대류되어 오는 memory effect를 나타낸다.

3.1.3 직교변형율에 의한 난류생성의 묘사불가

2차원 난류유동에 대해서 난류운동에너지의 생성은 2차원 유동에서 다음과 같이 표현된다.

$$P_k = -\overline{u_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \overline{u_2^2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \overline{u_1 u_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)$$

이에 비해서 선형 EVM은 다음과 같이 난류생성을 표현하고 있다.

$$P_k^{EVM} = 2\mu_t \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2\mu_t \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right)^2 + \mu_t \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)^2$$

위의 두 식을 비교해 보면 알 수 있는 바와 같이 EVM은 $\partial U_1 / \partial x_1$ 과 $\partial U_2 / \partial x_2$ 값의 음양을 구분하지 않고 모두 양으로 취급하기 때문에, 예를 들면 Fig.2에 나타낸 곳과 같이 같은 각도로 축소 또는 확대되고 있는 노즐과 디퓨저에 같은 초기조건으로 유입되는 유동을 계산하는 경우 EVM은 두가지 경우 모두 k 와 ϵ 이 하류를 따라 같은 모양으로 변하는 것으로 결과를 주게 된다. 또 다른 예는 산업적으로 매우 중요한 경우로써 축대칭 젯트가 수직으로 놓여진 평판에 분사되어 반경방향으로 유동이 빠져나가는 경우이다. 이 경우에도 EVM은 난류응력을 지나치게 크게 평가하기 때문에 평판에 부딪친 후의 반경류의 퍼짐을 과도하게 예측하게 되고 따라서 충돌부위에서의 열전달율을 과소평가하게 된다.

3.1.4 난류응력성분의 비 등방성이 큰 경우

2항의 난류유동의 특성에서 언급하였듯이 난류운동에너지가 어느 특정한 한 방향의 성분 에너지로 흡수된 후에 순간 압력과 순간 변형율의 상호작용에 의해서 보다 큰 성분의 난류응력의 일부분이 보다 작은 쪽으로 이동하여 재분배되는데, 이 난류 수직응력들이 평균변형율장과 작용하여 난류운동에너지를 생성하기 때문에 난류응력의 비등방성을 제대로 계산해내지 못하는 EVM은 이런 유동장을 해석하는데 심한 예측오차를 유발할 수밖에 없다.

난류응력의 비등방성이 심한 유동장의 예로는 주로 벽면의 전단응력이 매우 적든가 전혀 없는 유동구역으로써 수직충돌구간, 유동박리가 일어나는 구간과 재부착이 되는 구역등이다. 이러한 지점에서는 운동량과 열전달의 상사성이 성립하지 않으며 국부적으로 열전달과 물질전달이 최소 또는 최대가 되기 때문에 산업기계의 설계와 해석에 있어서 매우 정확한 계산이 필요한 유동구역이기도 하다.

3.1.5 유선곡률이 큰 경우

유체가 구부러진 경계면을 따라 흐르는 경우와 경계면이 급격히 확대되어 유체가 확대점에서 박리되었다가 재부착되는 지점까지의 사이에 존재하는 재순환 영역내에서 유선이 휘게 되는데, 평균유동의 각운동량이 유선곡률의 반경방향으로 증가하면 난류의 안정구역이 되어 난류가 감소하고 반대의 경우는 난류를 증가시킨다. 이러한 유선곡률은 난류응력의 생성과 난류응력간의 상호작용에 직접적인 영향을 미치며 난류응력의 생성은 난류수직응력의 크기에 의존하기 때문에, 난류의 수직응력 성분들을 제대로 표현하지 못하는 EVM으로는 정확하게 이

러한 유선곡률이 존재하는 유동장을 해석할 수가 없다. 유선곡률의 영향을 EVM에서 고려하기 위하여 여러 가지로 수정을 가하고는 있지만 각각의 난류응력성분을 개별적으로 정확하게 예측할 수 없는 한계 때문에 모두 임시방편적인 것들일 뿐이다.

3.1.6 시스템 회전이 있는 경우

회전하고 있는 닥트나 경계면 위의 난류유동인 경우에는 회전축에 대하여 직교방향으로 생기는 Coriolis 힘으로 인하여 난류응력성분이 발생한다. 예를 들면 Fig.3과 같이 x-y평면 상에서 주 유동방향이 x-방향으로 2차원적으로 전개되고 있는 난류유동을 포함하고 있는 4각 닥트가 z-방향을 축으로 하여 회전하면, 회전에 의하여 표면에 압력을 받는 내벽(압력면)주 위에서는 난류의 불안정구간이 생겨서 난류가 증가하게 되고, 반대편의 내벽(흡입면)주 위는 난류의 안정구간이 되어 난류가 감소되다가 하류로 내려가면 재층류화(re-laminarization)가 발생한다. 여기서 z-축으로 양인 회전은 x-방향의 난류응력성분을 감소시키고($R_{11} = 4\Omega \overline{u_1 u_2}$) 반대로 y-방향의 난류응력성분을 같은 크기로 증가시키기($R_{22} = -4\Omega \overline{u_1 u_2}$) 때문에 전체 난류 운동에너지의 변화는 없으면서 단지 성분간의 에너지 전수가 있을 뿐이다. 즉, 난류운동에너지 k 의 생성이 없기 때문에 EVM인 $k - \epsilon$ 이나 $k - \omega$ 방정식으로는 이러한 회전효과가 방정식상에 전혀 나타나지 않는다. 그래서 난류특성길이나 시간을 구하는 ϵ 나 ω 방정식에 이 효과를 반영하기 위해서 회전 Richardson수를 사용하여 이들의 생성항이나 소멸항을 수정한다. 그러나 EVM은 전술한 바와 같이 압력-변형율의 상관관계에 의한 난류수직응력 성분간의 재분배를 모사할 수 없기 때문에 이러한 수정에도 불구하고 난류Reynolds 응력을 제대로 계산하지 못하며 따라서 평균속도장 계산에도 큰 오차가 나타난다.

3.1.7 유동이 3차원 구조를 갖는 경우

거의 모든 난류계산모형들은 2차원 유동에 대한 실험과 이론적 고찰을 근거로 하여 개발된 것으로서 이 모형들을 3차원 유동장으로 확대 적용하는 데에는 무리가 따르게 마련이다. 특히 약간의 3차원성을 띤 난류경계층에서도 와점성계수는 뚜렷한 비등방성을 갖기 때문에 등방성 난류를 가정하고 있는 EVM으로는 원칙적으로 3차원 유동을 계산하는 것은 많은 계산상 오차를 유발할 수밖에 없다. Fig.4는 3차원 난류경계층내에서 측정된 유동방향과 유동에 수직한 방향의 와점성계수를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 대부분의 경우 와점성계수가 등방성에서 크게 벗어나 있다.

3.2 $k - \epsilon$ 방정식 vs $k - \omega$ 방정식 : 변수간의 교차확산 문제

선형 EVM으로 가장 널리 사용되고 있는 난류모형은 $k - \epsilon$ 방정식과 $k - \omega$ 방정식 모형으로써 CFD로 문제를 해석하고 기계설계를 해야 하는 경우에 어느 모형을 선택하여야 할 지 망설여질 때가 많다. 잘 알려진 바와 같이 $k - \epsilon$ 방정식 모형은 선형 EVM이 개발된 초기부터 현재까지 대부분의 연구자들에 의하여 다루어졌고 최근의 상용 CFD코드는 거의 모두 이 모형을 채택하고 있다. 이에 비하여 $k - \omega$ 방정식 모형은 Wilcox(1988)가 성공적으로 개발한 이후에도 학계와 산업체에서 잘 받아들여지지 않다가 최근에 와서야 항공역학분야와 특히 압축성 난류유동해석에 자주 사용되기 시작하였다. 최근에 발표되는 비교연구들에 의하면 대부분의 경우, 특별한 저 Reynolds 수정이 없이도 벽 근방의 난류를 잘 모사하는 $k - \omega$ 방정식 모형이 $k - \epsilon$ 방정식 모형보다 사용하기에 더 편리하고 정확도가 더 개선되고 있음을 알 수 있다. 이 장에서는 그 이유를 변수간의 교차확산 문제(cross-diffusion between variables)를 중심으로 이 두가지 모형의 장·단점을 살펴보고자 한다.



$k - \varepsilon$ 방정식 모형에서 난류운동에너지 k 는 $[L^2/T^2]$ 의 차원을 갖고 있고 난류운동에너지 소멸율 ε 의 차원은 $[L^2/T^3]$ 이다. 이 두 변수들은 기본 차원인 길이 $[L]$ 과 시간 $[T]$ 를 서로 공유하기 때문에 변수간의 교차확산은 불가피한 문제이다. 이 문제를 살펴보기 위해서 변수교차 확산 수정항들을 각각의 지배방정식에 넣으면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{kc} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{P} + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{\varepsilon k} k \frac{\partial k}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

여기서 σ_{kc} 와 $\sigma_{\varepsilon k}$ 는 교차확산항의 모형상수들이며 P 는 난류생성율을 나타낸다. 이 방정식들을 특성길이 l 과 특성시간 τ 에 대한 방정식으로 변환시키기 위해서 다음과 같이 정의된 관계를 사용한다.

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = \frac{l^2}{\tau}, \quad \tau = \sqrt{C_\mu} \frac{k}{\varepsilon}, \quad l^2 = C_\mu^{3/2} \frac{k^3}{\varepsilon^2}$$

이 관계들은 경계층내의 대수속도분포구간에서의 난류 성질을 만족시키기 위해서 적절한 계수를 도입한 것이다. 결과식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \sqrt{C_\mu}(1 - C_{\varepsilon_1}) \frac{P}{l^2/\tau^3} + \sqrt{C_\mu}(C_{\varepsilon_2-1}) + \left(\frac{3}{\sigma_\varepsilon} - \frac{2}{\sigma_k} + \frac{2\sigma_{\varepsilon c}}{C_\mu} - \frac{3\sigma_{kc}}{C_\mu} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} + \frac{\sigma_{kc}}{C_\mu} - \frac{\sigma_{\varepsilon c}}{C_\mu} \right) \frac{1}{l^2} \left(\frac{\partial l^2}{\partial y} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{7}{\sigma_\varepsilon} - \frac{5}{\sigma_k} - 6 \frac{\sigma_{kc}}{C_\mu} + 6 \frac{\sigma_{\varepsilon c}}{C_\mu} \right) \frac{1}{\tau} \frac{\partial l^2}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ &+ \left(\frac{6}{\sigma_k} - \frac{12}{\sigma_\varepsilon} + 9 \frac{\sigma_{kc}}{C_\mu} - 8 \frac{\sigma_{\varepsilon c}}{C_\mu} \right) \frac{l^2}{\tau^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{dl^2}{dt} &= \sqrt{C_\mu}(3 - C_{\varepsilon_1}) \tau^2 P + \sqrt{C_\mu}(3 - 2C_{\varepsilon_2}) \frac{l^2}{\tau} + \left(\frac{3}{\sigma_k} - \frac{2}{\sigma_\varepsilon} - \frac{2\sigma_{\varepsilon c}}{C_\mu} + \frac{3\sigma_{kc}}{C_\mu} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial l^2}{\partial \tau} \right) \\ &+ \left(\frac{6}{\sigma_\varepsilon} - \frac{6}{\sigma_k} + \frac{4\sigma_{\varepsilon c}}{C_\mu} - \frac{9\sigma_{kc}}{C_\mu} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t^2 \frac{\partial l}{\partial y} \right) \\ &+ \left(\frac{6}{\sigma_\varepsilon} - \frac{6}{\sigma_k} + 6 \frac{\sigma_{\varepsilon c}}{C_\mu} - 6 \frac{\sigma_{kc}}{C_\mu} \right) \frac{l^2}{\tau^2} \frac{\partial l^2}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ &+ \left(\frac{12}{\sigma_k} - \frac{18}{\sigma_\varepsilon} - 12 \frac{\sigma_{\varepsilon c}}{C_\mu} + 18 \frac{\sigma_{kc}}{C_\mu} \right) \frac{l^4}{\tau^3} \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

물리적으로 생각할 때, 기본 차원인 특성시간과 특성길이 사이에는 교차확산현상이 없을 것이므로 이 두 방정식에 나타나는 교차확산항들의 계수를 영으로 하는 조건으로부터 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} \sigma_{kc} &= -\frac{2}{5} C_\mu \left(\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \right) \\ \sigma_{\varepsilon c} &= \frac{3}{5} C_\mu \left(\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

따라서 본래의 $k - \varepsilon$ 방정식에 삽입한 교차확산항은 기본차원에서의 교차확산이 없는 조



건을 만족시키기 위해서 반드시 삽입되어야 하는 항이다. 다시 말하면 기존의 $k - \varepsilon$ 방정식 모형에는 변수간의 교차확산이 포함되어 있기 때문에 이를 제거하기 위하여 상기 두 교차확산항을 삽입하여야 한다.

같은 방법을 $k - \omega$ 방정식 모형에 적용하면 아래와 같다. 먼저 $k - \omega$ 방정식에 적절한 교차확산항들을 넣어서 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= P - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma^* v_t \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_c^* v_t^2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \\ \frac{D\omega}{Dt} &= a \frac{\omega}{k} P - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma v_t \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_c v_t^2 \frac{\partial k}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

여기에 다음과 같이 정의되는 관계식을 이용하면

$$v_t = \frac{k}{\omega} = \frac{l^2}{\tau}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\beta^* \omega}}, \quad l^2 = \frac{k}{\sqrt{\beta^* \omega^2}}$$

$k - \omega$ 방정식 모형은 다음 형태로 변환된다.

$$\begin{aligned} \frac{D\tau}{Dt} &= -a \sqrt{\beta^*} \frac{\tau^3}{l^2} P + \frac{\beta}{\beta^*} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\sigma + 2\sigma_c) v_t \frac{\partial \tau}{\partial y} \right\} - \sigma_c \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial l^2}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{2\sigma_c}{\tau} \frac{\partial l^2}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y} - 2(\sigma + \sigma_c) \frac{l^2}{\tau^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

여기서, 기본차원간에는 교차확산이 없다는 가정을 사용하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\sigma_c = 0, \quad \sigma_c^* = 2(\sigma - \sigma^*)$$

그런데 $k - \omega$ 방정식 모형에서 $\sigma = \sigma^* = 0.5$ 이므로 결국 $\sigma_c^* = 0$ 이 되어 기존 형태의 $k - \omega$ 방정식에는 변수간의 교차확산이 존재하지 않는다.

이것이 $k - \omega$ 방정식 모형이 $k - \varepsilon$ 방정식 모형보다 탁월한 계산결과를 주는 것으로 보여진다. 그러나 잘 알려진 바와 같이 $k - \omega$ 방정식 모형의 단점은 계산 결과가 자유경계면 밖의 자유 유동조건에 크게 좌우되는데 이 이유는 Cazalbou, Spalart & Bradshaw(1994)의 조건에 따르면 $\sigma^* < \sigma \leq 0.5$ 이어야 하는데 $\sigma = \sigma^* = 0.5$ 을 사용하기 때문에 자유경계면에서의 조건이 안쪽으로 영향을 미치는 것으로 판단된다. 따라서 이 문제를 해결하기 위해서는 $\sigma \neq \sigma^*$ 이어야 하고 이렇게 수정하는 경우는 $k - \omega$ 방정식에 교차확산을 제거하는 항이 더 삽입되어야 한다.

3.3 선형 EVM에 수정이 필요한 부분

3.1 항에서 고찰해 본 바와 같이 선형 EVM은 수학적으로 여러 가지 많은 결점을 갖고 있음에도 불구하고 사용이 간편하고 복잡하지 않은 경계면을 갖는 대부분의 2차원 경계층 문제를 푸는데 계산상의 오차가 공학적인 오차범위에 들어가기 때문에 앞으로도 많이 사용될 것으로 전망된다. 이 절에서는 선형 EVM을 공학적인 문제에 적용하는 경우에 반드시 고려하여야 할 수정부분에 대해서 생각해 보고자 한다.

먼저 고려해야 할 부분은 3.1항에서 상당부분 논의한 유선곡률과 시스템회전에 대한 수정이다. 이들을 수정하는 방법은 모형을 연구하는 사람들에 따라 여러 가지 방법이 제안되고 있기 때문에 자세한 내용은 생략하고 Lakshminarayana(1986)와 최근의 Patel과 Sotiropoulos(1997) 등이 정리한 논문을 읽기를 추천한다.

두 번째로 고려하여야 할 사항은 Pope(1978)이 "plane jet/round jet anomaly"라고 표현



한 문제이다. 이 문제는 같은 모형상수를 갖고 2차원 평면젯트와 축대칭 원형젯트를 계산하면 실제 실험결과(2차원젯트의 퍼짐율= 0.11, 축대칭젯트의 퍼짐율=0.09)와는 달리 2차원젯트의 퍼짐율이 축대칭젯트보다 더 적게 예측되는 문제를 말한다. 이 문제에 대한 수정으로 Pope(1978)이 제안한 “무차원 와류연신율, non-dimensional measure of vortex stretching” χ_p 를 도입하면 축방향으로 평균유동의 와류연신이 있는 유동장의 문제를 해결할 수 있다. (Sohn, Choi and Chung(1991), Cho and Chung(1992), Wilcox(1999)).

세 번째 문제는 Cho and Chung(1992)이 명명한 “jet/wake anomaly” 문제로서 역시 같은 모형상수로 평면 또는 원형 젯트와 후류를 계산하면 역시 실험결과(후류가 젯트보다 약 3배 이상 더 퍼짐)와는 달리 두 경우 모두 비슷한 정도의 퍼짐율을 예측한다. 이 문제를 해결하기 위하여 Cho and Chung(1992)은 간헐도에 대한 지배방정식을 유도하고 “non-dimensional invariant of interaction” Γ 를 도입하여 문제를 해결하였다(Fig.5).

마지막 문제는 $k-\epsilon$ 방정식 모형에 있어서 특성길이를 주는 ϵ -방정식에 대해서 더욱 정교한 수정을 가할 필요가 있다. 현재까지 사용되고 있는 ϵ -방정식은 완전한 ϵ -방정식으로부터 유도된 것이 아니고 단순한 보존방정식의 형태로부터 유추한 것이기 때문에 지금과 같이 DNS database 가 풍부하게 생산되는 환경에서는 완전한 ϵ -방정식에 근접한 도형방정식을 구성할 수 있을 것으로 사료된다.

4. 2차 Reynolds 응력 방정식 모형 (Differential Reynolds Stress Model, RSM)

Navier-Stokes 방정식으로부터 유도한 Reynolds응력 지배방정식으로부터 Reynolds응력을 구하는 방법인 RSM은 1970년도에 Daly and Harlow가 처음으로 시도한 이후, 지난 30여년동안 끊임없는 연구를 통해서 현재로는 난류유동의 기본 특성을 거의 대부분 정확히 모사할 수 있는 정도까지 개발되었다. 따라서 위의 3.1항에서 지적한 선형 EVM의 문제점을 RSM이 해결하였다고 할 수 있다. 그 위에 work station 과 pc의 꾸준한 성능향상과 수치 알고리즘의 발달에 힘입어서 이제부터는 RSM이 상용 CFD코드에 장착되기 시작할 것으로 전망된다. 그러나 엄밀한 의미에서는 완전한 Reynolds 응력방정식에 나타나는 모든 고차항들을 정확하게 모사하기 위해서는 아직도 해결하여야 할 부분들이 많이 남아 있다.

먼저 언급하여야 할 부분은 소멸율텐서 ϵ_{ij} 에 대한 문제이다. 지금까지는 ϵ_{ij} 을 등방성 성분과 비등방성 성분으로 나누고 비등방성 성분은 압력-변형 상관항의 난류응력 등방화 과정에 편입시켜 왔기 때문에 ϵ_{ij} 에 대한 지배방정식은 필요하지 않았고 단지 등방성 소멸율 ϵ 에 대한 방정식만 풀어왔다. 그러나 작은 규모의 에디들의 정보가 DNS database로 제공되면서 ϵ_{ij} 를 이와 같이 간단히 처리할 수 없는 문제점이 있음이 알려졌기 때문에 이에 대한 모형방정식을 개발할 필요가 있다.

두 번째 문제는 압력-변형 상관항의 보다 정확한 모형화가 필요하다. 압력에 대한 Poisson 방정식으로부터 압력은 slow부분과 rapid부분으로 나눌 수 있고 이들은 각각 서로 다른 기구를 통해서 난류에너지 재분배에 가담하고 있음이 알려져 있다. 이 slow부분에 의한 에너지 재분배, 즉 등방화과정에 대한 모형으로 가장 정확하게 실험결과를 모사하는 것으로는 Chung and Kim(1995)이 개발한 5차 모형이다. 이 5차 모형과 1,2차 모형으로 균질이완 난류유동의 등방화과정을 계산한 결과에 대한 비교가 Fig.6에 나타나 있다.

Rapid 부분에 대한 모형은 Launder, Reece and Rodi(1975)가 선형모형을 제안한 이래 많은 형태의 수정이 가해져왔다. 지금까지 제안된 모형을 체계적으로 정리, 검증하고 이들 모형이 기본적인 유동인 균질 전단유동의 asymptotic 상태를 정확하게 모사하기 위해서 각각의 모형상수가 가져야 할 값의 범위를 난류의 안정이론에 근거해서 Lee and Chung(1995)이 구한 바 있다. 이 결과에 의하면 Fig.7이 한 예를 보여주는 바와 같이 현재 제안되고 있는 많은 비선형 모형들의 모형상수가 이 안정구간 밖에 있음을 보여주고 있다.

세 번째 문제는 $-\overline{pu}/\rho$ 로 표현되는 압력에 의한 공간상의 난류에너지와 응력의 전달문제이다. 지금까지 이 문제에 대한 모형은 실험치의 부재로 인하여 전혀 시도되지 않았다. 단



지 Lumley(1978)가 실험데이터의 크기를 분석한 결과를 간접적으로 이용하여 $-\overline{\rho u_i/\rho} = 0.2 \overline{u_i u_j u_k}$ 라고 근사적으로 표현하였다. Kim and Chung(1994)는 압력이 본질적으로 비점성적임에 착안하여 Euler 방정식으로부터 압력의 난류성분에 대한 표현식을 유도한 후 이를 이용해서 이론적인 모형식을 도출하고 자유전단 유동에 적용해 본 결과, Fig. 8와 같이 계산결과가 실험데이터와 비교적 잘 일치하였다. 여기에 나타나는 모형상수들은 상당한 오차를 지닌 실험결과들을 이용한 것이기 때문에 DNS database가 확보되면 다시 그 모형상수를 조절할 필요가 있다.

마지막으로 언급하고자 하는 내용은 시스템 회전이 있는 경우에 난류운동에너지의 소멸율이 어떻게 변하는가 하는 문제이다. 실험과 DNS에 의하여 잘 알려진 사실은 시스템회전이 있는 경우, 스펙트럼상에서 에너지가 더 작은 에디로 전달되는 energy cascade 윌이 적어지고 따라서 난류에너지 소멸율이 감소한다. 그러나 이와같은 현상을 모형화해서 시스템회전 문제를 풀기에는 많은 문제가 있어왔다. 최근에 Park and Chung(1999)은 이론적으로 이 문제를 해석하고 균일난류유동에 대해서 난류소멸계수 C_ε 를 Rossby 수 ($Ro \equiv \varepsilon/(kQ)$)의 함수로 표현하고 광범위한 Ro 수에 대한 실험데이터와 DNS 결과를 잘 예측하였다. 여기서 개발된 모형은 비록 엄밀하게는 균일 난류에 대하여 유도한 것이지만 일반적인 경우에도 같은 정도의 결과를 줄 것으로 기대된다.

5. 난류구조에 의거한 모형 (Structure-Based Model, SBM)

2차원 난류유동인 경우 RSM에서는 한 점에서의 세 방향의 난류강도와 난류전단응력과 난류특성크기를 결정해 주는 등방성 난류에너지 소멸율 ε 등 5개의 변수를 기본변수로 해서 난류구조를 표현하고 있다. 그러나 Kassinos and Reynolds(1994)는 이 변수들이 난류의 구조를 기술하는 완전 변수셋트(complete set)가 되지 못함을 이론적으로 밝혔다. 그 대신 최소한의 완전 변수셋트(minimally complete set)로 난류에디의 축을 표현하는 텐서 a_{ij} (eddy axis tensor) 와 난류에디의 순간 변형율을 나타내는 켄트변수 ϕ (jettal parameter), 그리고 난류에디의 순간 회전율을 표현하는 헬릭스변수 γ (helix parameter)와 난류소멸율 ε 등을 제안하였다. 이들 변수를 지배하는 방정식을 균일 난류유동에 대하여 다음과 같이 유도하였다. 여기서 RSM의 Reynolds 등력과 이들 변수간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{v_{ij}} &= \frac{\overline{u_i u_j}}{q^2} = (1-\phi) \frac{1}{2} (\delta_{ij} - a_{ij}) + \phi a_{ij} \\ &+ \gamma \frac{1}{2} \frac{Q_k}{Q} (\varepsilon_{ikj} a_{yj} + \varepsilon_{jki} a_{yi}) \end{aligned}$$

이 SBM이 RSM에 비해서 상대적인 우수성은 RSM에서는 rapid 압력에 의한 압력-변형율 상호작용에 대한 선형표현인 Launder, Reece and Rodi(1975)의 모형이 조절하여야 할 모형상수를 포함하고 있는데 비해서 이 SBM은 수학적으로 이 선형모형관계식과 이에 포함된 모형계수를 엄밀하게 유도하고 있는 것으로도 입증된다. 문제는 이 SBM이 사용하는 변수들을 현재의 측정기술로는 직접적으로 측정할 수 없고 단지 DNS로 그 값들을 생산하여야 한다는 단점이 있다. 그리고 아직 이들이 경계면에서 같은 값들이 알려져 있지 않고 지배방정식의 유도과정이 매우 난해한 수학적 기법을 요구하기 때문에 공학분야에서 널리 받아들여지기까지는 상당한 시일이 걸릴 것이다. 그러나 연구하는 입장에서는 SBM의 발전내용을 예의 주시할 필요가 있다고 본다.



참고문헌

- Cazalbou, J. B., Sparlart, P. R. and Bradshaw, P., "On the Behavior of Two-Equation Models at the Edge of a Turbulent Region," *Physics of Fluids*, Vol.6, No.5(1994), pp.1797-1804.
- Cho, J. R. and Chung, M. K., "A $k - \varepsilon - \gamma$ Equation Turbulence Model," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.237(1992), pp.301-322.
- Chung, M. K. and Kim, S. K., "A Nonlinear Return-to-Isotropy Model with Reynolds Number and Anisotropy Dependency," *Physics of Fluids*, Vol.7, No.6(1995), pp.1425-1437.
- Daly, B. J. and Harlow, F. H., "Transport Equations in Turbulence," *Physics of Fluids*, Vol.13(1970), pp.2634-2649.
- Hanjalic, K., "Second-Moment Turbulent Closures for CFD: Needs and Prospects," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol.12(1999), pp.67-97.
- Kassinos, S. C. and Reynolds, W. C., "A Structure-Based Model for the Rapid Distortion of Homogeneous Turbulence," Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, Calif. 94305(1994)
- Kim, S. K. and Chung, M. K., "Spatial Transport of Reynolds Stresses by Pressure Fluctuations," *Physics of Fluids*, Vol.6, No.11(1994), pp.3507-3509.
- Lakshminarayana, B., "Turbulence Modeling for Complex Shear Flows," *AIAA Journal*, Vol.24, No.12(1986), pp.1900-1917.
- Launder, B. C., Reece, G. J. and Rodi, W., "Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.68, Pt.3(1975), pp.537-566.
- Lee, W. G. and Chung, M. K., "The Equilibrium States and the Stability Analysis of Reynolds Stress Equations for Homogeneous Turbulent Shear Flows," *Physics of Fluids*, Vol.7, No.11(1995), pp.2807-2819.
- Lumley, J. L., *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, Vol.18(1978), p.123.
- Lumley, J. L., "Toward a Turbulent Constitutive Equation," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.14(1970), pp.413-434.
- Park, J. Y. and Chung, M. K., "A Model for the Decay of Rotating Homogeneous Turbulence," *Physics of Fluids*, Vol.11, No.6(1999), pp.1544-1549.
- Patel, V. C. and Sotiropoulos, F., "Longitudinal Curvature Effects in Turbulent Boundary Layer," *Progress in Aerospace Science*, Vol.33(1997), p.1.
- Pope, S. B., "An Expansion of the Turbulent Round-jet/Plane-jet Anomaly," *AIAA Journal*, Vol.16, No.3(1978), pp.279-281.
- Saffman, P. G., "Development of a Complete Model for the Calculation of Turbulent Shear Flows," *Symposium on Turbulence and Dynamical Systems*, Duke University, Durham, NC, April(1976).
- Sohn, C. H., Choi, D. H. and Chung, M. K., "Calculation of Plane-of Symmetry Boundary Layer with a Modified $k - \varepsilon$ Model," *AIAA Journal*, Vol.29, No.3(1991), pp.395-400.
- Speziale, C. G., "On Nonlinear $k - \varepsilon$ and $k - \varepsilon$ Model of Turbulence," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.178,(1987), pp.459-475.
- Wilcox, D. C., "Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models," *AIAA Journal*, Vol.26, No.11(1988), pp.1299-1310.
- 임효재, "유선곡률과 균일전단에 의한 난류생성의 상호작용에 관한 실험적 연구," 한국과학기술원 기계공학과 박사학위논문(1995).



Figure 1. Variation of eddy viscosity coefficient with curvature parameter S_c .
open symbols: present data
closed symbols: data of Holloway and Tavoularis(1992)

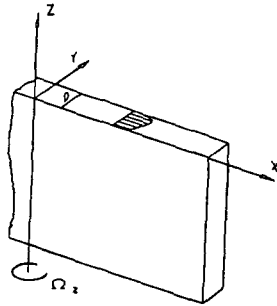
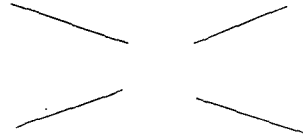


Figure 3. Illustration of a simple flow with system rotation.



$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} < 0$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} < 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} > 0$$

Figure 2. 같은 각도로 축소, 확대되는 노즐과 확대기 내부의 유동형태

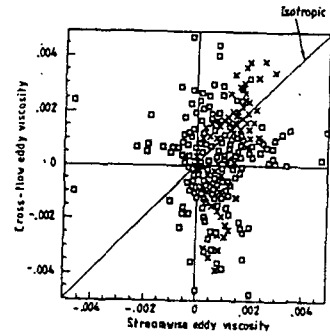


Figure 4. Spanwise vs. streamwise eddy viscosity in local mean flow coordinates inside a 3-D boundary layer.

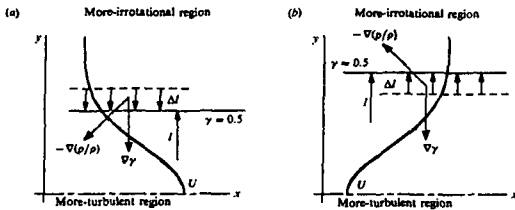


Figure 5. An interaction effect of mean shear and intermittency fields.

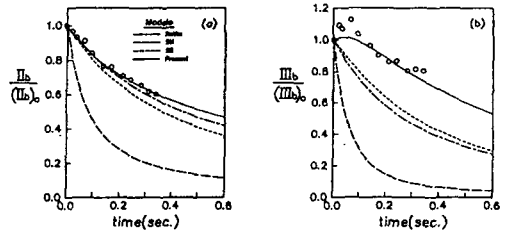


Figure 6. The comparisons of model predicts with the experiment of Le Penven et al.

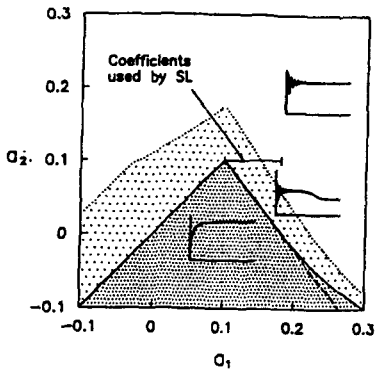


Figure 7. Stable and acceptable regions for a_1 and a_2 in the SL model.

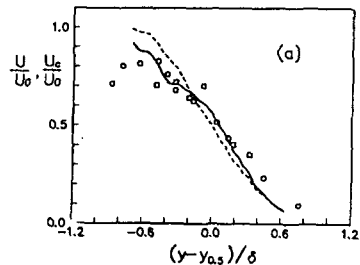


Figure 8. The streamwise convection velocity and the mean velocity profiles in (a) a one-stream mixing layer