



평판 뒤 전단층에서의 충격파-와동 상호 간섭에 대한 수치적 연구

Numerical Study on Shock-Vortex Interaction Behind a Flat Plate

○장세명¹⁾, 장근식²⁾

Se-Myong Chang and Keun-Shik Chang

In this paper we study numerically the shock-vortex interaction in the shear layer generated by moving shock waves above and below a flat plate. The faster normal shock is diffracted at the tip of the flat plate, producing a starting vortex. The slower normal shock below the flat plate arrives soon later to run across the vortex and make interaction. The two shocks are merged together and reflected back at the closed end of the shock tube to impinge on the shear layer developing multiple vortexlets. The computational simulation based on Euler and Navier-Stokes equations shows good prediction.

1. 서론

Dosanjh & Weeks [1]는 끝이 막힌 충격파관의 관측부 상류에 횡방향으로 원주(圓柱)를 설치하고, 여기에 이동 충격파를 입사 시켜 얻어지는 Karman 와동열과 하류의 끝벽에서 반사되어 역유입하는 충격파와의 상호 간섭 현상을 실험적으로 연구하였다. 이에 대해 본 연구에서는 원주 대신 평판을 사용하여 평판의 위쪽은 $M_s=1.41$ 인 빠른 충격파를, 그리고 아래쪽은 $M_s=1.22$ 인 느린 충격파를 평행하게 지나도록 해서 평판 끝으로부터 발생하는 전단층 (slip layer)과 역진행하는 반사 충격파 사이의 상호 간섭 현상을 수치적으로 연구한다.

전단층의 내부에서는 Kelvin-Helmholtz 불안정성에 의해 발생하는 소와동 (vortexlet)들과 충격파가 연속적으로 복잡한 상호 작용을 일으킨다. 이러한 현상은 전체 유동장의 구조가 준정상 상태 (quasi-steady state)에 이르기까지 계속된다. 저자들은 사각형 비정렬 격자 격자 위에서 Euler 및 Navier-Stokes 방정식을 유한 체적법으로 풀이하는 계산 시뮬레이션을 통하여 실험 모델에 기초한 본 문제를 해석하고자 한다.

2. 수치 해석의 방법 및 검증

2.1 계산 영역과 지배 방정식

Fig. 1에서 본 연구의 문제를 정의하였다. 충격파관 단면의 높이는 150 mm 이며, 평판의 끝단부터 하류의 수직벽까지 거리는 500 mm, 그리고 평판 끝단부터 유입부까지의 거리는 100 mm로 설정하였다. 초기에 평판 상부의 강한 충격파는 평판 끝단으로부터 3 mm 전방에서 출발하고, 평판 하부의 약한 충격파는 그보다 57 mm 뒤쳐져서 출발한다.

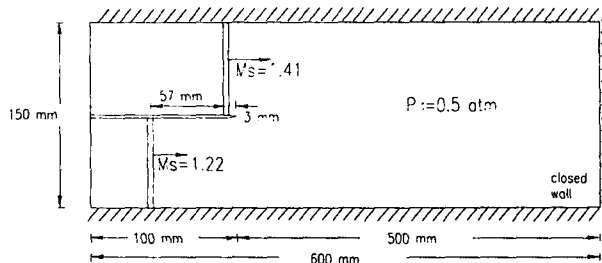


Fig. 1 Definition of the Present Problem

1) 학생 회원, 한국과학기술원 (KAIST) 항공우주공학과
 2) 회원, 한국과학기술원 (KAIST) 항공우주공학과

2 차원 비정상 압축성 비점성 유동을 모사하기 위해 다음의 Navier-Stokes 방정식을 지배 방정식으로 채택하였다. 여기에서 우변을 0 으로 놓으면 Euler 방정식이다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

여기에서

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ u_j (E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ u_i \tau_{ij} + q_j \end{pmatrix},$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_i u_i, \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right),$$

$$q_j = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu}{0.71} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad \mu = 1.716 \times 10^{-5} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2} \frac{384}{T + 111} \quad (\text{kg/ms})$$

이 방정식의 벽면 경계 조건은 다음과 같다.

$$u_i = 0 \quad (\text{no slip condition}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{thin-layer approx.}) \quad (3)$$

$$T = T_w \quad (\text{constant temperature})$$

$$\text{or } \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (\text{adiabatic}) \quad (4)$$

충격파관 연구에서 관의 벽은 커다란 열 손실원 (heat sink)으로 작용하기 때문에 (4)에서 단열 조건보다는 일정 온도 조건이 실제의 물리적 현상과 더 잘 맞는다. 이 밖에 입구 및 출구에서는 외삽 (extrapolation) 및 비반사 조건 (nonreflecting boundary condition)을 사용한다.

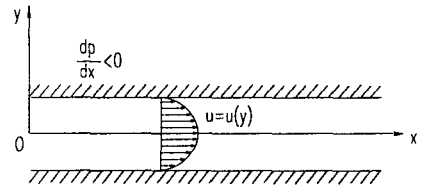
2.2 수치 기법

먼저 (1) 식의 대류 항 (convection term)을 시간에 따라 적분하는 방법에 대해서는 참고 문헌 [2]에 자세히 설명되어 있다. 따라서 여기에서는 (1) 식의 우변 확산 항 (diffusion term)을 적분하는 방법만을 설명하기로 한다. 높은 Reynolds 수의 유동에서 확산항의 수치 유속 (numerical flux)은 대류 항에 비하여 매우 작은 값을 지닌다. 즉 단순히 중앙 차분을 해 주는 것만으로도 안정된 해를 얻을 수 있다.

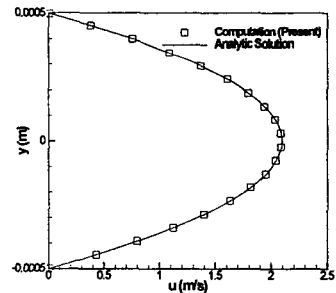
적용 격자 기법에 대해서도 참고 문헌 [2]의 방법과 비슷한 방법을 사용하였다. 다만 오차 지시자 (error indicator)는 밀도의 1 차 구배 (gradient)대신 주변 cell 과의 속도 차를 이용하였다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\epsilon_e = \sum_{j=1}^4 \left[\sum_{i=C_j(e)} (u_{ie} - u_{iC_j(e)})^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

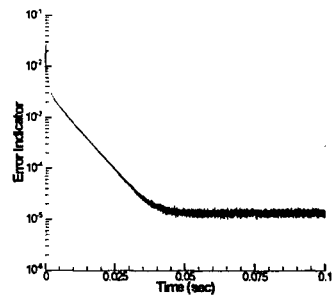
여기에서 e 는 cell index, 그리고 $C_j(e)$ 는 주변 cell을 나타낸다. 병합/분할의 수준 (level)은 경계층의 두께를 추정하여 결정한다. 일반적으로 Euler 방정식이 3~5 단계의 적용 격자를 사용하는 반면, Navier-Stokes 방정식에서는 4~7 단계를 사용한다.



(a) Definition of Problem



(b) Velocity Profile along Vertical Axis



(c) Convergence History

Fig. 2 Poiseuille Flow

2.3 벤치-마크 검증

본 연구에 사용한 Navier-Stokes 코드가 대류 항을 적절히 계산하고 있는지 확인하기 위하여, 이미 일반해가 알려져있는 간단한 문제를 풀이하여 보았다. 두 개의 평행한 평판 사이의 Poiseuille 유동 (Fig. 2(a) 참조)의 속도장에 대한 엄밀해는 다음과 같다 [3].

$$u(y) = -\frac{a^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2\right]; \quad -a < y < a \quad (6)$$

Fig. 2(b)에서 (6) 식의 해석해 (실선)와 수치 해석 결과 (네모)가 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 그리고 Fig. 2(c)에서 정상 상태에 이르는 시간은 약 0.05 sec 임을 알 수 있다. 경험적으로, 점성 경계층이 완전히 성장 (fully-developing)하는데 걸리는 시간 정도 (time scale)는 충격파 현상의 10^3 배 정도이다.

다음 단계로, 이미 잘 알려진 비정상 충격파의 회절 문제를 비점성 및 점성 계산을 통해 가시화 사진과 비교하여 보았다 [4]. Fig. 3(a)는 Euler 계산의 결과이며, Fig. 3(b)-(c)는 Navier-Stokes 계산의 결과이다. (b)에서는 벽면에서 일정 온도 조건을 사용하였고, (c)에서는 단열 조건을 사용하였다. 계산 결과 벽면에서의 미소한 점성 효과를 제외하고, 나머지 유동장에서 충격파들의 모습은 그다지 큰 차이가 없음을 알 수 있다. 그러나 전단층의 구조에는 주목할만한 차이점이 발견된다. 비점성 계산에서는 소와동 (vortexlet)들이 또렷하게 보이는 반면, 점성 계산에서는 이들이 감쇠되어 나타난다. 특히 같은 점성 계산이라도 열적 경계 조건에 따라 (b), (c)에서의 전단층 구조는 확연히 다르다. 또한 점성 계산에서는 수직 벽면에서 경계층의 박리 (separation)에 의한 2차 와동 (secondary vortex)이 나타난다. 이는 Fig. 3(d)의 실험 사진에서도 관찰할 수 있다. 실험 사진에서 윗 벽면 근방의 등밀도선 기울기의 부호는 계산 결과 (b)와 일치한다. 따라서 일정 온도 조건이 단열 조건 보다 물리적으로 더 합당한 경계 조건임을 알 수 있다.

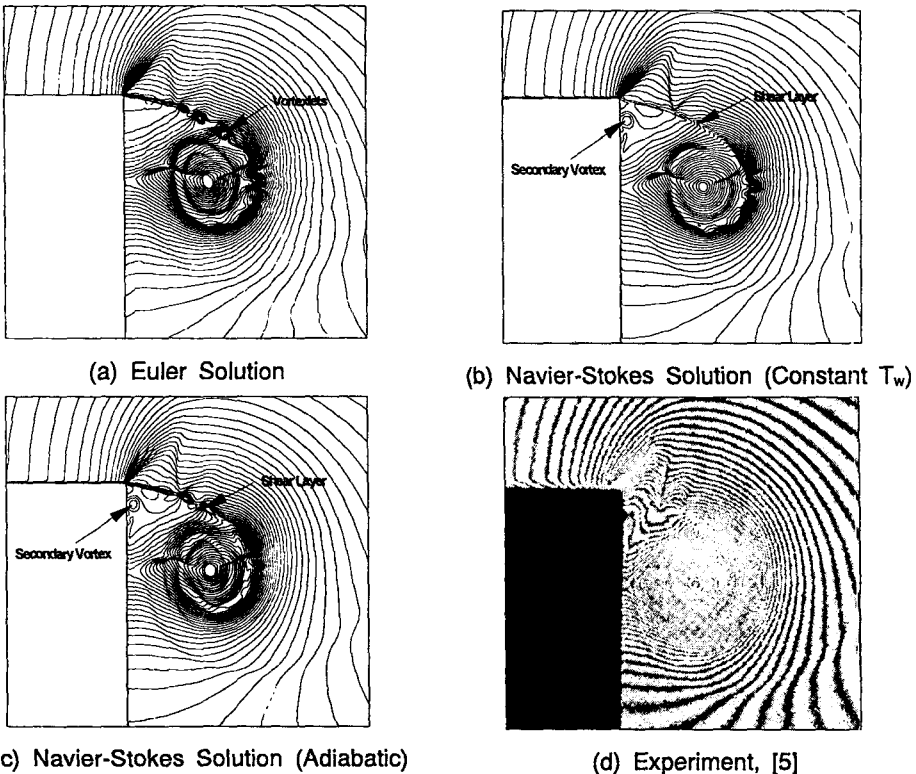


Fig. 3 Shock Diffraction over 90-Degree Convex Edge, $Re=1 \times 10^6$

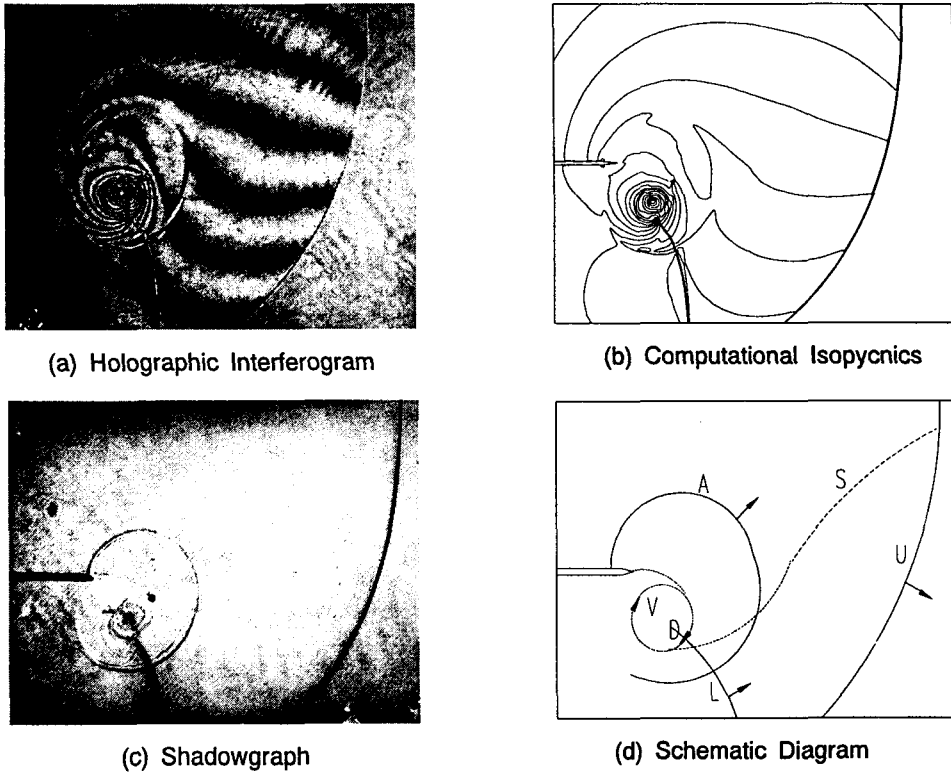


Fig. 4 Shock-Vortex Interaction, 200 μ s

3. 충격파-와동 상호 간섭

3.1 충격파-와동의 초기 간섭

Fig. 4(a)-(d)는 충격파들이 평판의 끝단으로부터 방사되어 나온 후 비교적 초기 시간대의 한 장면이다. 여기에서 (a)와 (c)는 실험을 통해 얻은 사진들이고, (b)는 본 연구의 수치 해석을 통해 얻은 등밀도선도이다. 그리고 (d)는 압축성 유동 요소들을 표시한 개념도이다.

평판 위쪽의 충격파 (U)는 출발 와동 (starting vortex, V)을 만들면서 회절되고, 곧이어 평판 아래쪽의 충격파 (L)가 V에 충돌하여 간섭한다. 전형적인 충격파-와동의 간섭 현상으로, L의 벽면쪽 부분은 가속되어 V로부터 방사상으로 퍼져 나간다 (A). 반면 와동 중심에 붙잡힌 부분은 반시계 방향으로 회전하게 된다 (D). 그러나 시간이 지나면서 D는 와동의 중심을 지나게 되고, 마침내 하류에서는 U와 L이 병합하여 평면 충격파에 가까운 형상을 회복한다. 이 충격파가 다시 뒤쪽 벽면에 반사되어 역유입함으로써 본 연구에서 우리가 관심있는, 3.2 절의 현상을 발생시킨다.

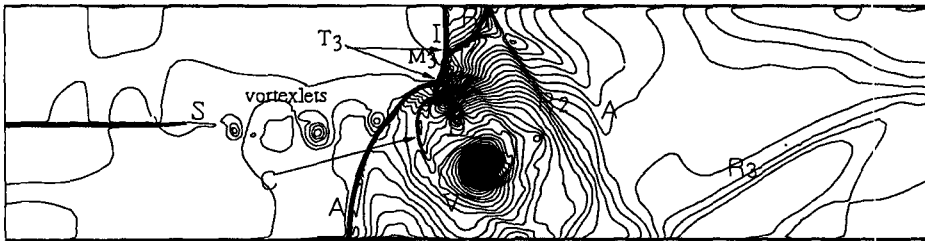
3.2 충격파-전단층 상호 간섭

반사된 충격파가 역유입하는 동안, 출발 와동에 연결된 미끄럼선 (slip line, Fig. 4(d)에서 S의 일부)은 길게 퍼져 거의 선형 (linear shape)을 이룬다. 미끄럼선을 기준으로 위아래 유동의 속도 차 때문에 이 부분은 얇은 전단층 (slip layer)을 형성한다. 여기에 충격파가 부딪치면서 충격파-전단층 상호 간섭 현상이 일어난다. Fig. 5(a)-(d)는 이러한 현상을 수치 해석 결과로부터 가시화 하고 있다. (a)-(c)는 Navier-Stokes 방정식을 풀이한 것이고, (d)는 (c)의 Euler 해석 결과이다.

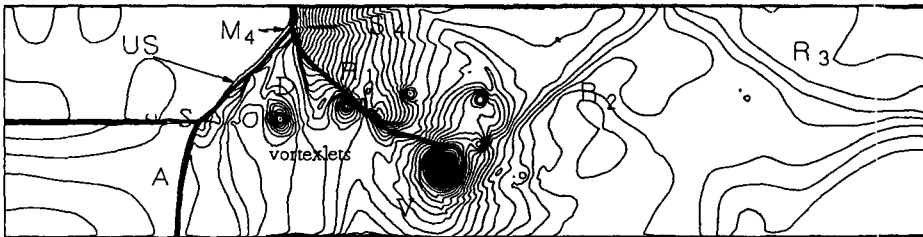
Fig. 5(a)에서, 입사 충격파(I)는 출발 와동(V)에 부딪치면서 다시 앞 절에서 언급한 충격파-와동 간섭을 일으킨다. 그림에서 I의 일부가 와동의 영향으로 많이 휘 것을 관찰할 수 있다. 여기



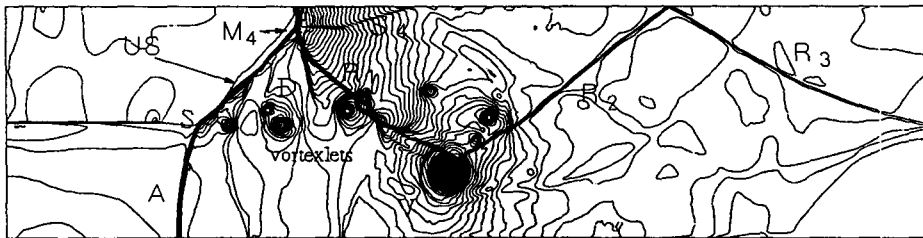
(a) 2000 μ s, Navier-Stokes Computation



(b) 2200 μ s, Navier-Stokes Computation



(c) 2500 μ s, Navier-Stokes Computation



(d) 2500 μ s, Euler Computation

Fig. 5 Shock-Slip Layer Interaction

에서도 가속 부분 (A)과 감속 부분 (D)을 구분할 수 있다. 한편 전단층 위에서는 불안정성에 의한 소와동 (vortexlet)들이 나타난다.

Fig. 5(b)는 좀더 뒤의 모습이다. A와 D는 2 개의 삼중점 (T_3)에서 마하 스템 (M_3)을 형성하는 충격파-충격파 상호 간섭을 일으키며 교차한다. 이후 마하 스템은 점점 자라나서 마침내 Fig. 5(c)에서는 충격파 US의 형상을 직선형으로 만든다. 그동안 충격파 D의 끝단은 전단층 위를 미끄러지면서 소와동들과 간섭한다.

Fig. 5(d)는 (c)와 같은 시간대의 모습으로 비점성 계산을 통해 얻은 등밀도선도이다. 이들은 전체적으로는 비슷한 결과를 보여준다. 파동 요소들은 점성 효과를 고려한 Navier-Stokes 계산에서보다 비점성 조건을 가정한 Euler 계산에서 훨씬 선명하게 보인다. 그러나 점성 계산 쪽이 전단층 내부 등에서 실제 유동을 더 잘 묘사하고 있는 것으로 생각할 수 있다.

3.3 준정상 유동으로의 전이

Fig. 5(c)-(d)에서, 충격파 US, D, 그리고 M_4 가 이루는 모양은 정상 상태에서의 마하 반사와 매우 유사하다. 여기에서 충격파 D는 US의 S에 대한 반사이며, 이들은 벽면 근방에서 마하 스템 (M_4)과 미끄럼선 (S_4)을 형성한다. 수치 해석 결과, 상반면의 유동에 대해 이동 충격파 US의 전파면에 수직인 방향의 유동 상대 속도는 초음속 ($M_i = M_{US} + M_{inlet} \sin \theta_i = 0.68 + 0.44 = 1.12$)이다.

Fig. 6은 이러한 설명에 대한 개념도이다. 출발 와동의 영향으로 전단층은 하류로 가면서 점점 위쪽으로 들린다. 미끄럼선인 전단층은 이를 가로지르는 유속을 허용하지 않기 때문에 평판 상부 유동에 대해 마치 고체 벽처럼 작용한다. 따라서 경사 충격파 (oblique shock)를 만들게 되는데, 이는 US에 해당한다. US는 윗벽에 반사되면서 마하 스템 (M_4)을 형성하며, 이것은 US와 D의 충격파-충격파 상호 간섭으로도 해석할 수 있다. 즉 US와 D는 모두 비정상 유동으로부터 발생했지만, 준정상 상태에서 이미 잘 알려진 충격파 반사 현상으로 해석된다.

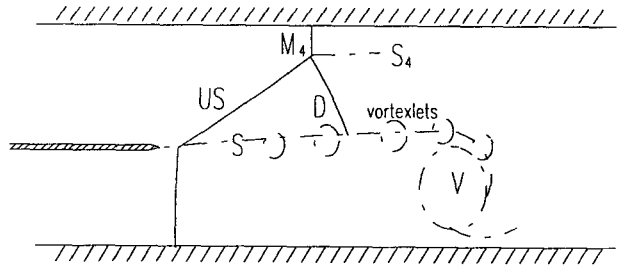


Fig. 6 Quasi-Steady Shock Reflection

4. 결론

실험 모델에 기초한 압축성 유동 문제를 수치 시뮬레이션을 통하여 구현하였다. 사각형 적용 격자를 사용하는 기존의 Euler 코드를 개조한 Navier-Stokes 코드를 개발하고, 간단한 벤치-마크 문제에 대해서 이를 검증하였다. 확산항의 영향으로 파동 요소들의 강도는 비점성 계산에서보다 약화되었지만, 실제 현상과 보다 더 유사한 유동장을 계산해낼 수 있었다.

본 연구를 통하여 충격파관에서 발생하는 압축성 유동이 비정상 상태 (unsteady state)로부터 준정상 상태 (quasi-steady state)로 전이하는 메카니즘을 이해하는 데 많은 도움을 받았다. 특히 반사 충격파가 상류를 향해 역류하면서 정상 상태의 마하 반사와 유사한 형태의 유동 패턴을 형성하는 현상은 매우 흥미롭다.

참고 문헌

- [1] Dosanjh D.S. and Weeks T.M., "Interaction of a Starting Vortex as well as a Vortex Street with a Travelling Shock Wave," AIAA Journal, vol. 3, pp. 216-223, 1965.
- [2] 장세명, 장근식, "유한 썩기에 의한 충격파 산란 현상의 수치적 연구," 한국전산유체공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 79-84, 1999.
- [3] White F.M., *Viscous Fluid Flow*, 2ed, McGraw-Hill, pp. 118-119, 1991.
- [4] Sun M. and Takayama K., "An Operator-Splitting Approach for Solving the Unsteady Navier-Stokes Equations," Symposium on Shock Wave, Japan, pp. 121-126, 1999.
- [5] Takayama K., "Shock Wave Diffraction over a 90 Degree Sharp Corner," Shock Waves - an International Journal, vol. 1, pp. 301-312, 1991.