



# FVS를 이용한 터널을 통과하는 초음속 실린더 주위의 충격파 거동 해석

고민호<sup>\*1</sup>, 신창훈<sup>\*2</sup>, 박원규<sup>\*3</sup>

## The Behavior of Shock Wave through a Circular Tunnel around Supersonic Cylinder using FVS Upwind Scheme

M. H. Ko, C. H. Shin, W. G. Park

A two-dimensional Euler code based on flux vector splitting scheme has been developed to simulate the behavior of supersonic shock wave over the cylinder. AF+ADI scheme was used for time integration. The sliding multiblock technique was implemented to handle the relative motion of the moving cylinder and the stationary tunnel. The code is validated with a problem of subsonic flow around a Naca-0012 airfoil. The Computation results show complex phenomena of the propagation of shock waves and the reflection as expansion wave at tunnel exit.

### 1. 서 론

과학의 발달과 함께 미사일, 총포류, 우주 발사체, 로켓을 비롯한 초음속 추진체의 종류가 계속 증가하고 있는 가운데 많은 공학자들이 초음속 유동의 공기 역학 해석에 관심을 기울이고 있다.

1970년대 초반까지는 풍동실험이 공기역학 자료를 구하는 주된 방법이었으나 풍동실험이 가지는 제반 문제점 및 한계 때문에 최근 CFD가 여러 scheme의 연구개발과 함께 공력자료의 유용한 해석 수단으로 널리 사용되고 있다. 그러나 초음속 유동장의 수치해석의 경우 충격파, 경계층의 상호작용등과 같은 불연속적이고 복잡

한 현상을 성공적으로 포착해 내는 것은 결코 쉬운 일이 아니며 종래의 중앙차분 수치해법으로는 어려움이 따른다.

예컨데 중앙차분법은 수치계산에서 일어날 수 있는 진동(oscillation)이나 불안정성(instability)을 제거하기 위해서 인공점쇄항(artificial viscosity)필요로 한다. 하지만 불안정성 제거에 필요한 최소한의 인공점쇄항의 추가는 사용자의 경험이 많이 요구되는 상당히 어려운 문제이며, 실제 수치해의 정확도나 수렴성이 인공점쇄항의 처리에 크게 영향을 받는다. 특히 초음속 또는 극초음속류의 경우에는 이러한 문제가 더욱 심각하다. 이러한 단점을 보완한 것이 풍상차분법이다. 풍상차분법은 유동의 특성에 따라 전방 혹은 후방 차분법을 사용하는 방법으로서 수치 플럭스 자체에 수치점쇄성이 포함되어 있으므로 별도의 인공점쇄항수 등이 불필요하며, 이 수치

<sup>\*1,2</sup> 학생회원, 부산대학교 대학원 기계공학과

<sup>\*3</sup> 정회원, 부산대학교 기계공학부

점성은 충격파와 같은 급격한 유동 구배를 갖는 곳에서 그 값이 증가하므로 초음속의 유동 해석에 적합하다.

대표되는 풍상차분법으로는 van Leer[1]와 Steger-Warming[2]의 flux vector splitting (FVS)과 Roe[3]의 flux difference splitting (FDS)등이 있으며, 전자는 강건성을, 후자는 점성유동에서의 정확성을 각각 장점으로 가진다. 하지만 이 두 방법은 Euler방정식과 같은 비점성류의 해석시에는 큰 차이를 보이지 않는 것으로 알려져 있다.[4]

본 연구에서는 마하수가 3인 실린더 주위에 형성된 공형충격파가 원형터널을 통과하는 과정을 수치해석하였다. 이 경우에 강한 공형 충격파와 팽창파, 그리고 터널 벽면에서의 반사파와 같은 물리적 현상이 일어날 것이며, 이러한 불연속을 성공적으로 포착하기 위하여 위의 설명한 차분법 중 강건한 방법으로 알려져 있는 flux vector splitting 기법을 사용하여 upwind 압축성 Euler 코드를 개발하였다. 이동격자기법으로는 sliding multi block[5]을 사용하였다.

## 2. 지배방정식

압축성 2차원 Euler 방정식을 일반좌표계 ( $\tau, \xi, \eta$ )에 대하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

위에서 플럭스항을 표현하면,

$$\hat{q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e_t \end{bmatrix},$$

$$\hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p \xi_x \\ \rho v U + p \xi_y \\ (\rho e_t + p)U - \xi_t p \end{bmatrix},$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + p \eta_x \\ \rho v V + p \eta_y \\ (\rho e_t + p)V - \eta p \end{bmatrix}$$

여기서 변환 Jacobian J와 반전 속도(contravariant velocity) U, V는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (2)$$

$$U = \xi_t + u \xi_x + v \xi_y, \quad V = \eta_t + u \eta_x + v \eta_y$$

압력은 이상기체상태방정식에 의하여 다음식으로 표현된다.

$$p = \rho(\gamma - 1)[e_t - 0.5(u^2 + v^2)] \quad (3)$$

여기서  $\gamma$  는 비열비이다.

## 3. 수치해석기법

일반적으로 사용하는 압축성 Euler방정식의 수치 해법은 대류 플럭스항의 수치적 차분화 방법에 따라 크게 중앙차분법과 풍상차분법(upwind scheme)으로 나누어지며, 중앙차분법은 물리적으로 양방향 모두에 영향을 받는 타원형(elliptic) 특성을 가진 점성항의 차분에 유용하고, 풍상차분법은 물리적으로 유동의 상류의 영향을 받는 쌍곡선(hyperbolic) 특성을 가진 대류항의 차분에 유용하다.

### 3.1 Flux vector splitting 기법

1981년 Steger와 Warming[2]이 처음으로 제안한 flux vector splitting 기법은 Flux Jacobian의 고유치의 부호, 물성치의 전달방향을 고려하여 플럭스항을 분할하는 기법이다. 즉, 자코비안 행렬(Jacobian matrix)의 eigenvalues를 영 이상의 값(non-negative)과 영 이하의 값(non-positive)으로 나누고 그에 따라 플럭스 벡터를 전 방향(forward)과 후 방향(backward)으로 분할한다. 하지만 Steger-Warming은 이와 같은 flux vector 분할법이 유일하지 않다는 점을 밝히고 있으며, 또한 Steger-Warming의 방



범으로 분할한 flux vector는 음속점 ( $M = \pm 1$ , sonic point)과 정체점(stagnation point)에서 연속적으로 미분가능하지 않기 때문에 수치계산 결과에서도 불연속적인 현상(sonic glitch)이 나타나게 된다. 1982년 Van Leer[1]는 그의 논문에서 플럭스 벡터 분할법이 유일하지 않다는 점을 기초로 하여 몇가지 제한조건을 부여함으로써 음속점에서 기울기가 연속인 분할 flux vector를 구성하였다.

Van Leer의 분할은 다음과 같다.

○초음속인 경우

$$\begin{aligned} E^+ &= E, E^- = 0 & M_\xi \geq 1 \\ E^+ &= 0, E^- = E & M_\xi \leq 1 \end{aligned} \quad (4)$$

○아음속인 경우 ( $-1 < M_\xi < 1$ )

$$E^\pm = \begin{bmatrix} f_1^\pm \\ f_1^\pm \left( \frac{\hat{\xi}_x (-\bar{U} \pm 2a)}{\gamma} + u \right) \\ f_1^\pm \left( \frac{\hat{\xi}_y (-\bar{U} \pm 2a)}{\gamma} + v \right) \\ f_4^\pm \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$f_1^\pm = \pm \frac{\rho a}{4} (M_\xi \pm 1)^2 \frac{|\nabla k|}{J}$$

$$\begin{aligned} f_4^\pm &= f_1^\pm \left[ \frac{-(\gamma-1)\bar{U}^2 \pm 2(\gamma-1)\bar{U}a + 2a^2}{(\gamma^2-1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{\hat{\xi}_t}{\gamma} (-\bar{U} \pm 2a) \right] \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_t &= \frac{\xi_t}{|\nabla \xi|}, \hat{\xi}_x = \frac{\xi_x}{|\nabla \xi|}, \hat{\xi}_y = \frac{\xi_y}{|\nabla \xi|}, \\ \bar{U} &= \hat{\xi}_t + \hat{\xi}_x u + \hat{\xi}_y v, \bar{M} = \frac{\bar{U}}{a} \end{aligned}$$

### 3.2 MUSCL scheme

일반적인 풍상차분법은 공간정확도가 1차이므로 정확도를 높이기 위해 물리변수를 외삽(extrapolation)하거나 플럭스를 외삽하는 기법들이 연구되었으며, 특히 cell 내의 분포를 선형으로 가정하고 물리량을 cell interface로 외삽하

는 방법을 MUSCL scheme[6]이라 한다.

$$\begin{aligned} Q_{i+1/2}^L &= \alpha Q_i + \beta Q_{i-1} + \gamma Q_{i+1} \\ Q_{i+1/2}^R &= \alpha Q_{i+1} + \beta Q_{i+2} + \gamma Q_i \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 계수  $\alpha, \beta, \gamma$  는 아래와 같다.

$$\alpha = 1 - \frac{\epsilon k}{2}, \beta = -\frac{\epsilon}{4}(1-k), \gamma = \frac{\epsilon}{4}(1+k)$$

$$\begin{cases} \epsilon = 0 & : \text{1st order upwind} \\ \epsilon = 1, k = -1 & : \text{2nd order fully upwind} \\ \epsilon = 1, k = \frac{1}{3} & : \text{3rd order upwind} \end{cases}$$

biased approximation

### 3.3 수치적 이산화

편미분 연립방정식인 지배방정식 식(1)을 수치적으로 이산화하여 대수해를 구하게 된다. 본 연구에서는 음해법을 사용하며, 음해법은 양해법에 비해 더 많은 계산량을 필요로 하지만 시간 스텝을 더 크게 할 수 있어 계산 시간의 단축이라는 장점을 가진다. 음해법을 이용한 공간차분화와 시간차분화를 수행하면 지배방정식은 다음과 같은  $\delta$ -form의 형태로 변환되어진다.

$$[Numerics] \delta Q = [Physics] \quad (7)$$

식(7)에서 우변의  $[Physics]$ 항은 수치해의 효율성에 관계하며, 좌변의  $[Numerics]$ 항은 수치해의 정확성에 관계한다. 그러므로 물리적으로 만족하는 한도에서 좌변의  $[Numerics]$ 항은 단순화 시켜 계산의 효율성 증대를 가져올 수 있다.

지배방정식 (1)을 식(7)의  $\delta$ -form으로 나타내기 위해서는 식(8)과 같은 선형화 과정이 필요하다.

$$\begin{aligned} \hat{E}^{n+1} &\simeq \hat{E}^n + [A]^n \Delta \hat{q}^{n+1} \\ \hat{F}^{n+1} &\simeq \hat{F}^n + [B]^n \Delta \hat{q}^{n+1} \end{aligned} \quad (8)$$

선형화된 지배방정식을  $\delta$ -form의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \left( [I] + \Delta \tau \left[ \frac{\partial [A]}{\partial \xi} \right]^n + \Delta \tau \left[ \frac{\partial [B]}{\partial \eta} \right]^n \right) \Delta \hat{q}^{n+1} \\ & = - \Delta \tau \left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Beam and Warming[7]이 제안한 근사 인수 분해(AF scheme)을 적용하고, 양의 고유치에 대한 플럭스에 대해서는 후방차분을 음의 고유치에 대한 플럭스에 대해서는 전방차분을 사용하여 유한차분화 시킨뒤 다시 쓰면

$$\begin{aligned} & \left\{ [I] + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} ([A^+]_{i,j} - [A^+]_{i-1,j} + [A^-]_{i+1,j} + [A^-]_{i,j}) \right\} \\ & \left\{ [I] + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} ([B^+]_{i,j} - [B^+]_{i,j-1} + [B^-]_{i,j+1} + [B^-]_{i,j}) \right\} \\ & (\Delta \hat{q}) = RHS = \\ & - \Delta t \left\{ \frac{1}{\Delta \xi} [E_{i+\frac{1}{2},j} - E_{i-\frac{1}{2},j}] + \frac{1}{\Delta \eta} [F_{i,j+\frac{1}{2}} - F_{i,j-\frac{1}{2}}] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기에 ADI scheme을 적용하면 최종적인 두 단계의 차분화 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{단계1: } & \left\{ [I] + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} ([A^+]_{i,j} - [A^+]_{i-1,j} + [A^-]_{i+1,j} \right. \\ & \left. + [A^-]_{i,j}) \right\} (\Delta \hat{q}^*) = RHS \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{단계2: } & \left\{ [I] + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} ([B^+]_{i,j} - [B^+]_{i,j-1} + [B^-]_{i,j+1} \right. \\ & \left. + [B^-]_{i,j}) \right\} (\Delta \hat{q}) = (\Delta \hat{q}^*) \end{aligned} \quad (12)$$

### 4. 코드 검증

개발된 코드의 검증을 위하여 마하 0.8의 NACA-0012 airfoil을 대상으로 검증하였다. Fig. 1은 등압력 선도를 나타내며 Fig. 2는 central scheme 코드에 의해 계산된 값과 FVS를 이용하여 개발된 코드의  $C_p$ 값을 보여준다. 0.5근처에서 발생하는 충격파를 central scheme 코드는 5개의 격자점에서 포착하는 반면, FVS scheme 코드는 2개의 격자점내에서 바로 포착해내고 있다.

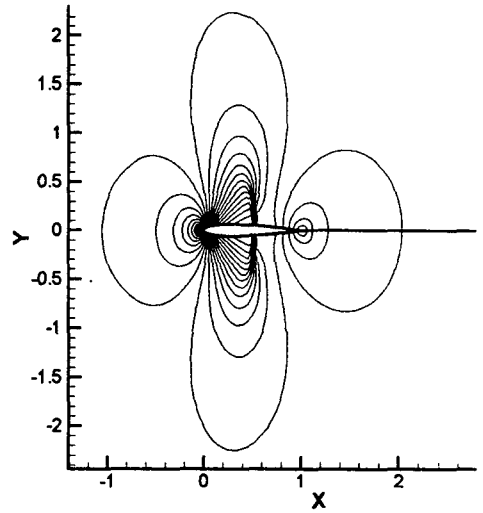


Fig. 1 Pressure contours over NACA-0012

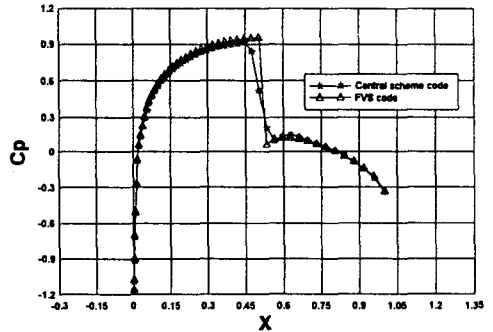


Fig. 2 Pressure coefficient for a NACA-0012 airfoil at M=0.8

### 5. 격자구성 및 경계조건

실린더의 길이 L을 참조길이로 두고 무차원화 시키면, 원형 터널의 지름은 1, 길이는 6.5이고, 실린더의 지름은 0.5이다.

본 연구에서 사용되는 유한차분법(Finite Difference Method)의 해는 사용되는 격자의 영향을 많이 받으므로, 양질의 격자를 얻기 위하여 5개의 다중블록을 형성하였다. 격자 갯수는 블록1(100 × 51), 블록2(40 × 26), 블록3(100 × 51), 블록4(130 × 130), 블록5(130 × 151)으로 총



28421개이다. 또한 계산시간의 단축을 위하여 실린더의 상부에 대해서만 계산을 수행하였다. Fig.3은 본 연구에서 사용된 계산 격자를 보여 준다.

비점성 유동이므로 물체표면 및 벽면의 속도 경계조건은 접선유동조건, 즉 슬립조건(slip condition)이며, 압력은 내부 데이터에 의한 외삽을 사용하였다. 또한 1/2평면만을 해석하므로 중심선을 따라 대칭조건을 적용하였다.

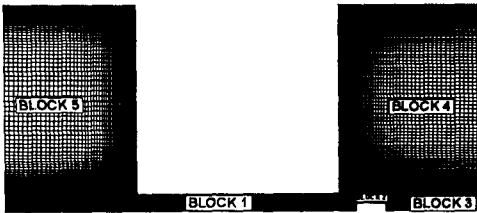


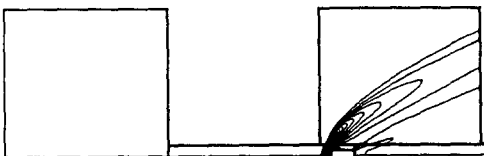
Fig 3. Grid system

### 6. 결과 및 고찰

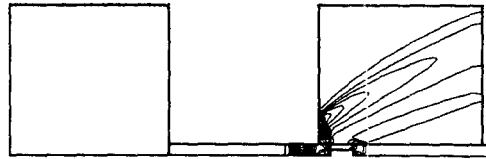
2차원 FVS Upwind Euler방정식을 이용하여 마하수3으로 돌진하던 실린더가 터널 앞 0.5 위치에서 순간 정지했을 경우에 충격파 거동의 수치 해석을 수행하였다.

High order의 결과는 계산중에 있어 본 논문에서는 1차 order의 결과를 제시한다.

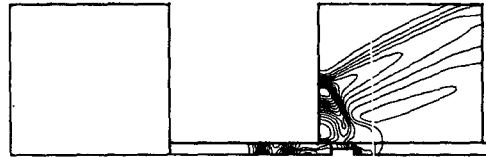
Fig. 4는 무차원 시간에 따른 등압력선을 나타내며, 실린더가 정지한 때를 기준으로 시간을 계산 하였다. Fig. 4(a)는 무차원 시간 0일 때로서 실린더 주위에는 공형 충격파(bow shock)가 형성되었고, 실린더의 양 모서리에는 팽창파(expansion wave)가 포착되었으며 실린더의 중앙선(center line)에서 가장 높은 압력 분포를 보였다.



(a) At time = 0.



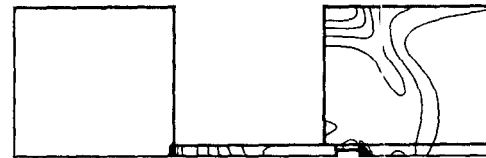
(b) At time = 0.4



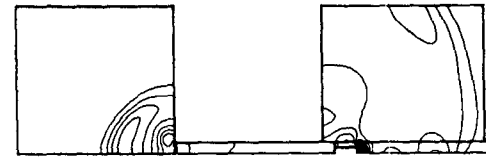
(c) At time = 1.0



(d) At time = 1.8



(e) At time = 3.2



(f) At time = 5.2

Fig 4. Pressure contours

진행하던 공형 충격파는 조금 뒤 원형터널의 벽면에 부딪치게 되며, Fig. 4(b), Fig 4(c)는

유동의 source가 크게 터널의 벽면을 타고 수직으로 올라가는 것과 터널 내부로 진입되어 들어가는것으로 분리됨을 보여주고 있다. 내부로

진입한 충격파는 거의 압축파 형태를 유지하며 터널 출구를 향해 진행하였다. 벽에 부딪힌 충격파는 반사파를 형성시켰고, 아래쪽의 일부는 실린더의 영향으로 깨어짐을 보여준다. 또한 실린더의 후미에는 실린더의 순간적인 정지에 따른 압축파가 생성되었고, (d)에서 이 압축파는 벽면에서 반사되어 나온 반사파와 서로 만나게 되어 유동의 변화가 일어남을 볼 수 있다.

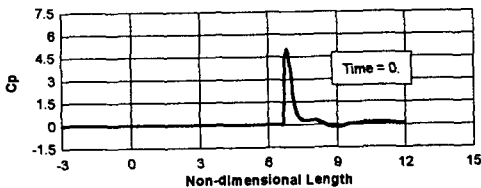
(e)에서 터널로 진입했던 source는 원형터널의 출구에 도착해 팽창하기 시작하였고, 터널벽을 타고 올라간 source는 계속 올라가 계산영역 밖으로 빠져나갔다, (f)는 터널 밖으로 나온 유동이 약한 구형 팽창파를 형성함을 보여주고 있다.

Fig. 4에서 보듯이 적응격자기법을 사용하지 않았음에도 개발된 코드는 비교적 불연속선을 정확히 잡아내었다.

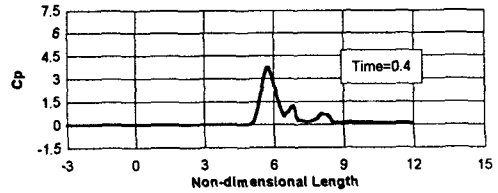
Fig. 5는 Fig. 4와 같은 시간대에, 터널 높이에서의 압력계수(pressure coefficient)를 보여주고 있다. Fig. 5(a)에서 궁형 충격파에 의한 불연속적인 급속한 압력증가를 볼 수 있다. 하지만 파의 진행에 따라 그 크기는 점차 감소하며, 완만해진다. 터널 출구를 통과하는 Fig. 5(e)에서는 Fig. 5(a)의 최고압력계수보다 약 1/5로 최고압력이 감소하였으며, 터널의 출구에서 팽창에 따른 압력 저하가 보여진다.

Fig. 6은 무차원시간 3.2에서의 유선을 나타낸 그림으로서 터널 벽으로부터의 반사파에 의해 유동의 흐름이 전환되고 있으며, 실린더 상면에 와류(vortex)가 형성됨을 잘 보여주고 있다.

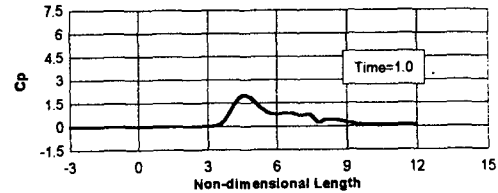
Fig. 7은 터널 출구에서의 유선을 나타낸 것으로 유동의 확산과, 출구벽 모서리에서의 고속분출에 따른 강한 와류 형성을 나타내고 있다



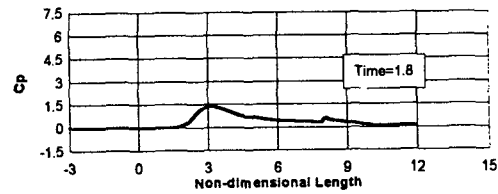
(a) At time = 0.



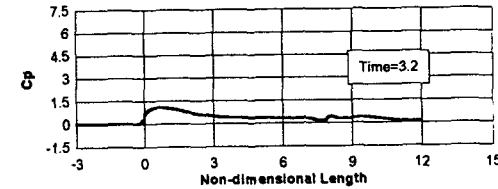
(b) At time = 0.4



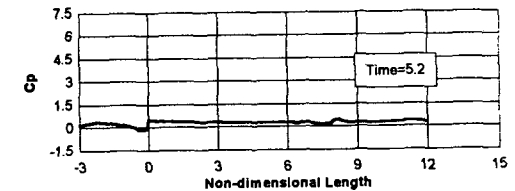
(c) At time = 1.0



(d) At time = 1.8



(e) At time = 3.2



(f) At time = 5.2

Fig 5. Pressure coefficient history

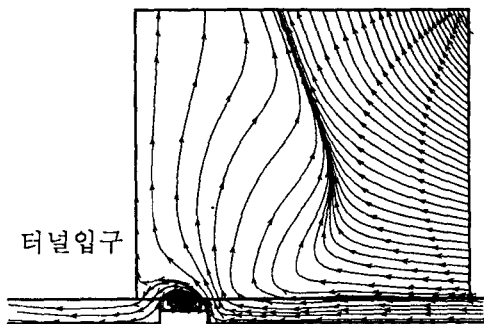


Fig 6. Streamlines at inlet, time = 3.2

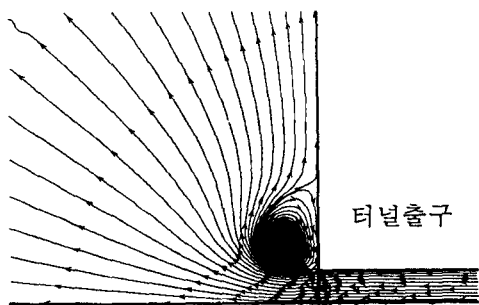


Fig 7. Streamlines at outlet, time = 5.2

### 7. 결 론

본 연구에서는 초음속 유동장 해석을 위한 Upwind Euler 코드를 개발하였으며, 이를 이용하여 마하수 3의 실린더 주위에 형성된 궁형 충격파의 거동해석을 수행하였다.

개발된 코드는 공간차분화를 위해 Flux Vector Splitting scheme을 사용하였고, 시간차분화를 위해 AF+ADI scheme을 사용하였다. 그리고 격자계의 움직임과 보간을 위해 슬라이딩 멀티블럭 방법을 사용하였다.

본 연구로부터 실린더 주위의 궁형충격파와 팽창파, 벽과의 충돌에 따른 반사파의 생성과 전파를 포착하였고, 파의 전파 과정에 따른 압력계수의 변화, 유동장의 특성변화를 해석하여 터

널로 진입되는 초음속 충격파 거동을 규명하였다.

### 참고문헌

- [1] van Leer, B., "Flux-vector Splitting for the Euler Equation," *Lecture Notes in Physics*, Vol. 170, 1982, pp.507-512
- [2] Steger, J. L., Warming, R. F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite Difference Methods," *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, No.2, April 1981, pp.263-293
- [3] Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers Parameter Vectors and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.43, October, 1981.
- [4] "Solutions of Supersonic Slot Injection Problems," Ph. D., Dissertation, AOE Dept., Virginia Tech., Apr. 1988.
- [5] Chang-Hoon Shin and Warn-Gyu Park, "Numerical Flow Field Analysis of the High Speed Train Entering into a Tunnel" *Proc. of 4th KSME-JSME Fluids Eng. Conf*, October. 1998.
- [6] Anderson, W. K., Thomas, J., and Van Leer, B., "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equation," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 9, 1986, pp. 1453-1460
- [7] Beam, R. M. and Warming, R. F., "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, April, 1978.