



## 비정렬 적응격자를 이용한 기체-입자 혼합유체에서의 충격파 전파의 계산

Adaptive Unstructured-Grid Computation of Shock Wave Propagation  
in the Gas-Particle Suspension○박기철<sup>1)</sup>, 장근식<sup>2)</sup>

Ki-Cheol Park and Keun-Shik Chang

Shock wave propagating in the particle suspension has important applications. Examples are shock waves occurring in the solid rocket plume and detonation of dusty particles by shock waves. Experimental and numerical investigations on this subject have drawn much attention. More recently, Sivier et al. numerically simulated the experiment of Sommerfeld using the unstructured adaptive grid. They used the Eulerian-Eulerian approach based on the continuum assumption for both gas and particles. In the present paper, a new numerical method using the Lagrangian particle tracing technique and unstructured particle-adaptive grid for the polydisperse system is presented. It is explained why the existing numerical calculation has showed discrepancy with the experimental results by Sommerfeld.

## 1. 서론

입자-기체 혼합체 속의 충격파 거동에 대한 연구는 많은 응용분야를 가지고 있는데, 예를 들어, 고체로켓 추진체의 배기유동에서의 충격파 역학, 매우 작은 고체입자의 점화 및 연소, 오염된 공기 속에서의 화염전파 그리고 화학공장에서 입자들의 유압 전송 등 여러 가지를 들 수 있다. 이러한 이유로 매우 작은 입자가 혼합된 기체 속을 전파하는 충격파에 대한 연구는 과거 30.여년 동안 흥미로운 연구주제의 하나로 계속되어왔으며 실험 및 수치 계산을 통하여 이에 대한 많은 연구 결과들이 발표되어 왔다. 수치 계산의 경우 Carrier<sup>1</sup>, Kriebel<sup>2</sup>, Rudinger<sup>3</sup> 및 Marconi et al.<sup>4</sup> 등이 입자 부상 기체 속을 전파하는 수직충격파 뒤의 "Relaxation Zone" 에 대하여 연구하였다. Kim & Chang<sup>5</sup> 는 입자 부상 기체에서 압축 경사면 위를 이동하는 충격파의 거동에 대하여 2 차원 비정상 Euler 방정식을 사용하여 해석하였다. 실험적으로는 Outa et al.<sup>6</sup> 및 Sommerfeld<sup>7</sup> 가 충격파 관을 이용하여 입자-기체 혼합체 속을 전파하는 충격파에 대한 연구가 있다. 이들 역시 평형기체 가정에 기초한 계산 결과를 함께 제시하고 있으나 시험결과와는 상당한 차이를 보이고 있다. 최근의 계산결과로는 Siver et. al.<sup>8</sup> 등이 Sommerfeld 의 실험을 수치적으로 계산한 예가 있는데, 그들은 비정렬 적응격자를 사용하였으며 기체와 입자 모두를 연속체로 가정한 "Eulerian-Eulerian" 접근방법을 사용하였다. Sommerfeld 에 비하여 근소하게 개선된 결과를 보여주고 있으나, 충격파의 초기 입사속도가 작고 입자밀도가 큰 경우에는 Sommerfeld 와 마찬가지로 부정확한 결과를 나타내었다.

본 논문에서는 비정렬 격자 상에서 다양한 크기의 여러 입자가 함께 존재하는 기체-입자 혼합체의 비정상 압축성 이상유동을 계산하기 위한 새로운 계산방법을 제시하고 Sommerfeld 의 실험을 모사한 기존의 계산결과가 실험결과와 차이를 보이는 이유에 대하여 부분적으로 설명하고자 한다. 이를 위하여 여러 종류의 입자를 동시에 고려하기 편리한 Lagrangian 입자 추적기법을 기존의 비정렬 적응격자 유동해석 기법과 결합하고 입자-기체 이상유동의 격자 적용에 필수적인 "입자적응" 기법을 제시하고자 한다.

## 2. 지배방정식 및 수치적기법

비점성 압축성 유동을 지배하는 2 차원 축대칭 오일러(Euler) 방정식은 직교 좌표계  $(x, y)$  상에서 입자에 의한 생성항  $S$  를 포함하여 식 (1) 과 같이 표시된다.

1) 삼성항공 엔진연구센터 (641-120 경남 창원시 성주동 28 번지)

2) 한국과학기술원 항공우주공학과 (305-701 대전시 유성구 구성동 373-1)



$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{S} \quad (i=1, 2) \tag{1}$$

여기서  $\mathbf{U}$  는 보존변수들이며  $\mathbf{F}$  는 플럭스 벡터이다. Roe's 의 flux difference splitting; 풍상차 분법을 사용하여 수치적 플럭스를 구하였으며, 여기에 사용된 primary 와 dual 격자틀그림 1 에 나타내었다. 입자의 단위체적당 밀도 및 이에 따른 생성항을 구하기 위한 입자 제어체적 은 동일한 격자계를 사용하였다. 시간에 대하여서는 외재적 4 단계의 Runge-Kutta 시간적분법 을 사용하였다.

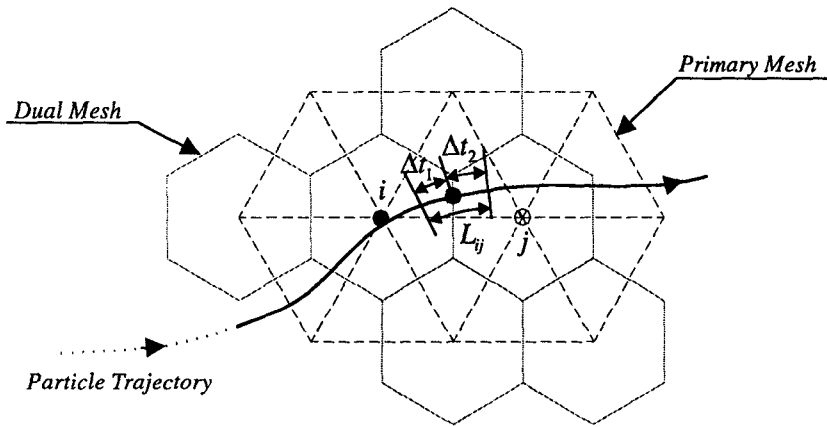


Fig. 1 Control volume for the calculation of particle source vector  $\mathbf{S}$  following the particle motion

### 3. 기체-입자 상간 상호작용

기체-입자 두 상간의 질량전달은 없이 열전달 만을 고려하며, 희박 입자조건을 가정하여 입자간 충돌은 없는 것으로 한다. 입자의 Lagrangian 운동방정식은 다음의 상미분 방정식에 의하여 표현될수 있다.

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt_p} = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{C_D}{D_p} \Delta V \cdot L_\infty (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p), \tag{2}$$

$$\frac{dT_p}{dt_p} = 6 \frac{Nu}{Pr} \frac{\mu}{\rho_p} \frac{1}{\rho_\infty} \frac{L_\infty}{a_\infty} \frac{1}{D_p^2} \frac{C_{p,g}}{C_{p,p}} (T - T_p), \tag{3}$$

이때,

$$\Delta V = \sqrt{(u - u_p)^2 + (v - v_p)^2},$$

여기서,  $\rho, T, u, v, a, \mu, D_p$  및  $L_\infty$  는 각 밀도, 온도, x 또는 y 방향 속도, 음속, 기체의 점



성, 입자 반경 및 특성길이를 나타낸다.  $C_{p,g}$  와  $C_{p,p}$  는 일정 압력에서의 기체와 입자의 비열비를 각각 나타낸다. 입자의 저항계수  $C_D$  와 Nussel 수  $Nu$  는 Sommerfeld<sup>7</sup> 의 경우와 동일하게 각각  $C_D = 112 \cdot \text{Re}_p^{-0.98}$  및  $Nu = 2 + 0.6 \text{Re}_p^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$  를 적용하였다. 기체의 속도 및 온도가 한 시간 간격에서 일정하다고 가정하고, 식 (2) 와 (3) 을 적분하여 입자의 새로운 속도 및 온도를 구하게 된다. 여기서, 기체-입자 상간 운동량 및 열전달에 따른 입자 생성향 벡터  $\mathbf{s}$  는 식 (4) 에 의하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{PX} \\ F_{PY} \\ Q_p + u_p F_{PX} + v_p F_{PY} \end{pmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$F_{PX} = \frac{\pi}{8} D_p^2 \rho C_D (u_p - u) \Delta V \frac{1}{L_\infty^2},$$

$$F_{PY} = \frac{\pi}{8} D_p^2 \rho C_D (v_p - v) \Delta V \frac{1}{L_\infty^2},$$

$$Q_p = \frac{\pi}{\gamma - 1} \frac{D_p}{L_\infty} \frac{Nu}{\text{Pr}} \frac{\mu}{\rho_\infty a_\infty L_\infty} (T_p - T).$$

그림 1 에 나타난 제어체적  $i$  의 생성향 벡터는 매 시간간격마다, 식 (5) 에 따라 새롭게 계산하여 구하게 된다.

$$\mathbf{s}_i = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_{i,k}^m \cdot N_m \quad (5)$$

여기서  $K$  는 입자의 시간에 제어체적  $i$  를 지나는 입자의 총갯수이며,  $M$  는 서로 다른 크기를 가지는 입자 종류의 수이다.  $N_m$  은 크기가  $m$  인 입자의 수밀도이다. 그림 1 에 나타난 바와 같이 입자가 제어체적  $i$  와  $j$  의 경계를 지나는 경우에는 부분 시간  $\Delta t_1$  과  $\Delta t_2$  를 사용하여 입자 생성향 벡터를 구해준다. 이 부분 시간은 입자가 거리  $L_{ij}$  를 지나는 동안 제어체적  $i$  와  $j$  에서 각각 소요된 시간을 의미한다

#### 4. 이상유동에서의 격자적용 및 자료구조

비정상 이상유동의 경우 시간 정확도를 유지하기 위해 매시간 간격마다 입자 생성향을 새롭게 계산해 구하게 된다. 그러나 충격파와 같은 불연속 유동장에서 해의 정확도를 높이기 위해 일정한 시간간격마다 격자적용이 수행되는 경우, 입자가 속한 요소의 형상과 일련 번호가 계속하여 바뀌기 때문에, 격자 적용과 동시에 각각의 입자들이 속하는 요소 및 제어체적을 새로이 결정해 주어야 한다. 일반적으로, 비정상 문제의 경우, 매우 많은 횡수의 격자 적용이 수반되므로 (본 논문에서의 경우 매 10번의 반복 계산 마다 3 단계의 격자 적용을 실시) 입자가 소속된 요소의 새로운 일련 번호의 결정을 매우 빠르게 처리해 줄 수 있어야

한다. 이를 위하여 요소분할의 경우와 요소 병합의 경우에 서로 약간 다른 알고리즘이 필요한데, 본 논문에서는 다음과 같은 방법을 제안하고자 한다.

먼저 요소분할의 경우에는 입자가 속한 초기 요소를 알고 있으므로 이 초기 요소로부터 분할된 요소를 탐색하면 된다. 그러나 격자 적용 후 초기요소는 부모요소 및 아들이소 2개로 나누어지게 되므로 이 부모 요소와 아들 요소를만 탐색하므로 입자가 최종 속한 요소를 구할 수 있다. 요소 병합의 경우에는 초기 요소가 병합되어 사라지는 경우에 대한 고려가 필요하며 이를 위해 초기요소가 어느 요소로 병합되는지에 대한 정보가 필요하다. 4.2 병합의 경우를 제외하고는 이 병합된 요소가 입자가 속한 새로운 요소라고 할 수 있다. 4.2 병합의 경우에는 병합된 요소와 그 요소의 아들이소를 탐색하여 입자가 최종 속한 요소를 구할 수 있다. 이렇게 구해진 요소를 이루는 세 점에 대한 제어체적 중 어느 제어체적에 포함되는지를 탐색하면 입자가 속한 제어체적 역시 구할 수 있다

### 5. 입자 적응기법

입자부상이 있는 비정상 문제의 경우 입자의 제어 체적(수밀도-단위체적당 입자 수-를 계산하기 위한 기준)은 초기 격자의 제어체적과 동일하다. 따라서 격자 적용이 진행되면 입자의 제어체적은 기체의 제어체적에 비하며 매우 커지게 된다. 그러나 여기서와 같이 대표입자를 설정하여 혼합제를 가정하는 경우 입자의 제어체적은 격자 최소 크기에 비하여 대략 비슷한 크기를 유지하여야 하므로, 이 경우 부정확한 해를 얻을 수 있다. 이를 해결하기 위하여 그림 2에 나타낸 바와 같이 단위체적당 입자 수(입자 수밀도)의 결정 및 초기 입자위치의 결정을 하기 위한 방법을 제안하고자 한다. 이를 입자적응단위(Particle Adaptation Level) 이라 하고 NPAL 이라는 변수를 사용한다. 이 NPAL 의 값은 수행될 격자 적용에 비례하여 설정하며 이 효과에 대해서는 다음의 결과 및 토의에서 자세히 언급될 것이다.

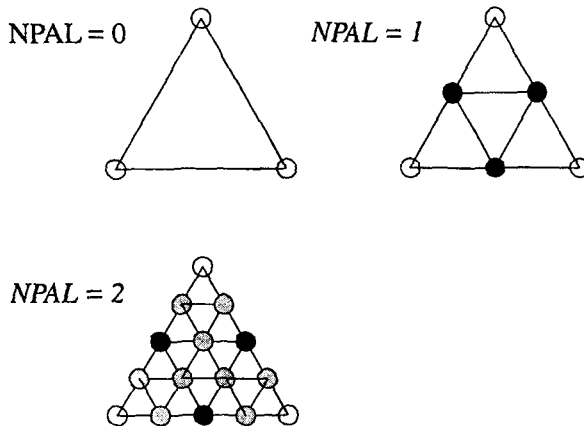


Fig. 2 Three different levels of particle control volume. Circles indicate initial particles with equal number density.

### 4. 결과 및 토의

Sommerfeld<sup>7</sup>의 실험 중 입사 충격파의 속도,  $M_{s,o}$ , 는 1.49, 입자-기체 질량 비,  $\phi$ , 는 0.6

인 경우에 대하여 입자적응의 효과를 살펴 보았다. 입자의 직경은  $27\mu\text{m}$ 로 균일하게 설정되었다. 격자적응이 되기 전에는 입자의 제어체적과 기체의 제어체적이 동일하고 모든 격자점의 제어체적에 입자가 균일하게 분포하게 된다. 그러나 격자 적응이 진행됨에 따라 최초 격자점의 제어체적은 감소하게 되며 격자 적응에 의하여 추가된 격자점의 제어체적이 새로이 생기게 된다. 따라서 격자 적응과 동시에 입자 적응을 하지 않는 경우에는 새로이 생겨난 제어체적에 입자의 영향이 미치지 못하게 된다. 반면 최초 격자점의 제어체적에는 이에 비해 매우 큰 입자 제어체적이 할당되어 큰 입자 수 밀도를 가지게 되므로 입자의 영향이 매우 크게 나타나게 된다. 따라서 입자 적응이 없는 경우 입자와 기체간 상호작용이 격자 적응을 하기 전의 최초 격자점 부근에서 매우 국부적으로 발생하게 되고 결국 전체적인 입자 저항을 감소시키게 된다. 그림 3에 충격파 관 길이를 따른 마하 수 변화를 Sommerfeld의 실험 결과와 비교하여 나타내었다. 입자적응을 한 경우는 Sommerfeld의 실험결과와 잘 일치하고 있는 반면, 입자적응이 없는 경우는 충격파의 속도 감소율이 실험값에 비해 적음을 알 수 있다.

혼합 이상기체 방정식 및 입자를 연속체로 가정하는 “Eulerian-Eulerian” 방법의 경우에는 다양한 입자 크기를 동시에 고려하기가 용의하지 않다는 어려움이 있기 때문에 대부분 질량 평균된 입자의 크기를 사용하는 경우가 대부분이다. 그러나, 여기서 고려하고 있는 문제의 경우, 실제 실험에 사용된 기체-입자 혼합체 속의 입자는 다양한 크기 분포를 가지는 여러 입자들로 구성되어 있기 때문에, 평균 입자 크기로 단순화된 입자 한 개의 저항력은 다양한 크기를 가지는 이 여러 입자들의 저항력을 합한 것과는 다르게 되고, 충격파 전파속도 감쇠 정도에서도 차이를 보이게 된다. 본 논문에서는 대표 입자 1 개를 사용한 경우 및 Sommerfeld 실험에서 추정하고 있는 실제 입자 분포도에 따른 12 가지종류의 입자 직경을 가지는 입자 군(Particle Group)을 사용한 경우를 각각 계산 비교하고 그 효과를 살펴 보았다. 이를 위하여 기존의 계산 결과가 실험 결과와 잘 일치하지 않는, 입사 충격파의 마하수가 1.26 인 경우를 선택 하였다. 그림 3에 나타낸 바와 같이,  $27\mu\text{m}$  크기의 대표 입자 1 개만을 사용한 Siver et. al.<sup>8</sup>의 경우 계산 결과와 실험값이 차이를 보이고 있으며, 본 논문에서도 동일한 크기의 대표 입자 1 개를 사용한 경우에는 Siver et. al.의 계산 결과와 큰 차이를 보이고 있지 않다. 그 이유에 대하여 Sommerfeld 와 Siver et. al. 은 여러 가지를 가정하여 설명 하였으나 본 논문에서 언급하고자 하는 입자군의 효과에 대하여서는 그 영향이 미미할 것으로 판단하였다. 그러나 여기에서의 계산 결과에서 볼 수 있듯이, 실제 입자 분포에 따른 12 종류의 입자들로 이루어진 입자군을 사용하는 경우, 1 개의 대표입자를 사용하는 경우와 상당히 다른 결과를 보여 주고 있으며, Sommerfeld의 실험값과 보다 잘 일치하는 것을 보여주고 있다.

## 5. 결론

기체-입자 혼합체의 압축성 이상 유동을 해석하기 위하여 기존의 비정상 적응격자 압축성 유동해석기법에 Lagrangian 입자추적기법을 적용한 계산 프로그램을 개발하였다. 비정상 압축성 이상유동에서 발생하는 충격파와 같이 유동장 내부에 불연속면이 존재하는 경우, 해의 정확도를 높이기 위하여 격자적응이 필요하게 되는데, 이 경우 기체-입자간 상호작용이 유동장내에서 적절하게 이루어지기 위하여 입자적응기법이 반드시 필요하다. 또한 입자-기체 이상유동의 경우 1 개의 평균 입자를 사용하는 경우와 실제 입자종류의 분포에 따른 입자군을 사용하는 경우는 서로 다른 결과를 가져올 수 있다. 현재 본 논문에서는 Siver et. al. 이 언급한 실험값과 계산값이 일치하지 않는 여러가지 요인들 중 입자군의 효과만을 검토하여 보았으나 그의 다른 요인의 효과에 대해서는 앞으로 계속 연구될 예정이다.

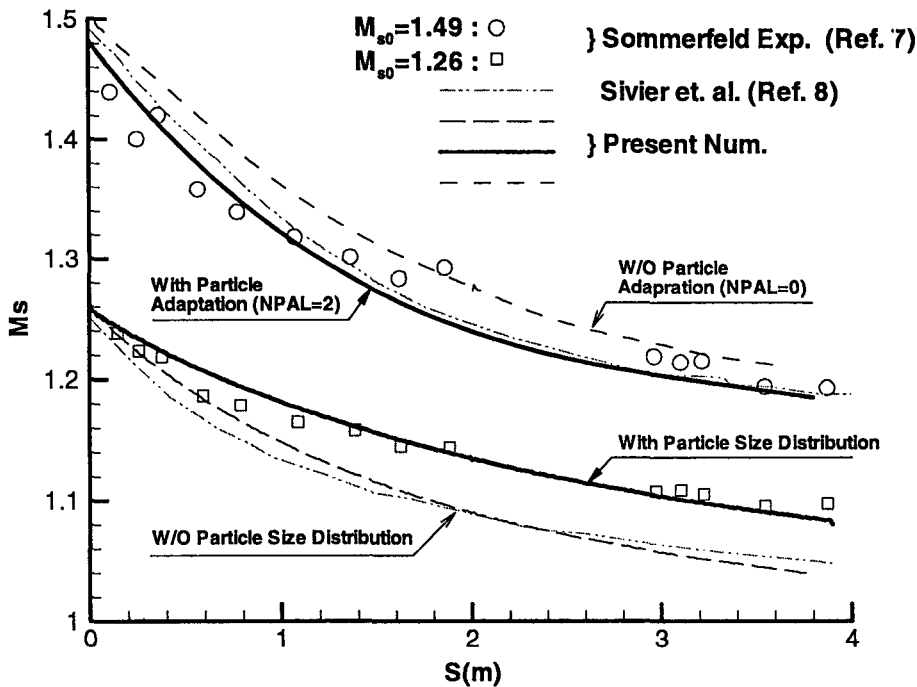


Fig. 3 Variation of the shock mach number  $M_s$  along the shock tube center line ( $\phi=0.63$ ).

참고문헌

- [1] Carrier, G. F., "Shock waves in dusty gas," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 4, 1958, pp. 376-382.
- [2] Kriebel, A. R., "Analysis of Normal Shock Waves in Particle Laden Gas," *Journal of Basic Engineering*, Dec. 1964, pp. 655-665
- [3] Rudinger, G., "Analysis of nonsteady two phase flow." *Phys. Fluid*, Vol.7, 1964, pp. 1747-1754.
- [4] Marconi, F., Rudman, S., and Calia, V., "Numerical Study of One-Dimensional Unsteady Particle-Laden Flows with Shocks," *AIAA Journal* Vol. 19, No. 10, 1981, pp. 1294-1301.
- [5] Kim, S. W., and Chang, K. S., "Reflection of shock wave from a compression corner in a particle-laden gas region," *Shock Waves, An International Journal*, Vol. 1, 1991, pp. 65-73.
- [6] Outa, E., Tajima, K., and Morii, H., "Experiments and Analysis on Shock Waves Propagating through a Gas-Particle Mixture," *Bulletin of the JSME*, Vol. 19, No. 130, April 1976, pp. 384-394.
- [7] Sommerfeld, M., "The unsteadiness of shock waves propagating through gas-particle mixtures," *Experiments in Fluids*, Vol. 3, 1985, pp.197-206.
- [8] Sivier, M., Loth, E., Baum, J., Löhner, R., "Unstructured adaptive remeshing finite element method for dusty shock flow," *Shock Waves, An International Journal*, Vol. 4, 1994, pp. 15-23