Delaunay 삼각화 기법을 활용한 다중-블록 정렬 격자의 자동 생성 기법

Automatic Multi-Block Grid Generation Technique Based on Delaunay Triangulation

김 병수[1]
Byoungsoo Kim

In this paper, a new automatic multi-block grid generation technique for general 2D regions is introduced. According to this simple and robust method, the domain of interest is first triangulated by using Delaunay triangulation of boundary points, and then geometric information of those triangles is used to obtain block topology. Once block boundaries are obtained, structured grid for each block is generated such that grid lines have C^0-continuity across inter-block boundaries. In the final step of the present method, an elliptic grid generation method is applied to smoothen grid distribution for each block and also to re-locate the inter-block boundaries, and eventually to achieve a globally smooth multi-block structured grid system with C^1-continuity.

Keywords: numerical grid generation, automatic grid generation, multi-block structured grid, Delaunay triangulation

1. 서론

전산유체역학에 의한 유동 해석을 위해서는 해당 유동장을 유한한 숫자의 계산점, 즉 계산격자로 대체하여야 한다. 이러한 계산 격자는 그것 자체가 전산유체역학의 최종 목표가 되지는 않지만, 계산 격자의 종류나 질이 전산유체역학의 최종 목표인 유동해의 정확도, 수렴성, 그리고 계산 시간 등에 매우 큰 영향을 미치는 중요한 요소임은 잘 알려진 사실이다. 전산유체역학이 공학적 해석 도구로서 뿐만이 아니라, 설계 도구로서의 그 활용도가 점점 높아지고 있는 추세에 비하여, 아직도 격자 생성 과정은 전산유체역학 적용의 병목점으로 인식되고 있다. 특히, 보편적으로 가장 많이 사용되고 있는 정렬 격자를 복잡한 유동장에 적용하기 위해서는 다중-블록으로 구성된 격자계를 사용하게 되는데, 이 과정에서 블록 경계의 설정 및 입력 작업은 가장 시간이 많이 들고, 오류를 범하기 쉬운 작업에 해당한다.

따라서, 블록 생성을 쉽게 그리고 자동으로 할 수 있는 강건하고도 효율적인 기법의 개발은 격자 생성과 관련된 연구 분야의 중요한 이슈들 중 하나라고 할 수 있다. 이와 관련한 연구가 지난 십여년간 꾸준히 이루어져 오고 있는데, 예를 들면 비정렬 삼각형 격자계에서 개발된 Advancing Front Method(AFM)을 2-차원 영역에서의 사변형 요소를 생성할 수 있는 기법으로 변형시킨 알고리즘을 이용하여 블록 생성을 할 수 있는 방법이나[1,2], 풍선에 공기를 충분히 주입시키면 그 외형은 풍선을 감싸고 있는 주변 용기의 형상을 따라가는 단순한 현상을 유사하게 적용하여 2-차원 영역을 하부-영역으로 분할할 수 있는 기법 등이 있다.[3] 또한, 복잡한 형상을 구성하는 각 요소의 위상학적/기하학적 정보에 따라 블록 구성 규칙을 설정하여 이를 자동적으로 적용할 수 있게 함으로써 블록 생성을 자동화할 수 있는 기법과[4,5], 물리 영역에서의 형상을 추상적으로 표현함으로써, 위상 영역에서 추상화된 형상에 대한 블록 구성을 자동적으로 생성하여 다시 물리 영역으로 환원하는 기법 등도 주목할 만한 연구 결과이다.[6-8] 그리고, 2-차원 유동장의 형상을 여러 개의 꼭지점을 가진 위상학적 다각형으로 인식하여 점차적으로 작은 개수의 꼭지점을 지닌 여러 개의 다각형으로 반복적으로 분할함으로써 궁극적으로 블록에 해당하는 위상학적 사각형들로 유동장을 채워넣는 기법도 소개되었다.[9]

1) 충남대학교, 항공우주공학과 (305-764, 대전시 유성구 궁동 220, 전화: 042-821-6686, kbskbs@cnu.ac.kr)

본 논문에서는 유동장 경계를 따라 분포된 점들에 대한 Delaunay 삼각화 기법을 이용하여 다중-블록 정렬 격자를 자동으로 생성하는 새로운 기법을 소개하고, 몇 가지 적용 예들을 보이고자 한다.

2. 블록 생성 기법

주어진 유동장에 대한 다중-블록 정렬 격자의 생성을 위해서는, 우선 대상 영역이 적절한 수의 위상학적인 사각형인 블록들로 분할되어야 한다. 이때, 이러한 블록들의 위상이나 그 구조가 격자의 질을 결정하는 중요한 요소이고, 궁극적으로 유동해의 질에 영향을 미치게 된다. 유동해, 특히 유동변수의 구배 등에 대한 정보가 없는 상태에서는 일반적으로 유동장의 형상을 이용하여 격자를 생성해 놓고 그 격자계를 이용하여 유동조건을 원하는 값으로 바꿔가면서 유동해를 구하는 것이 일반적인 방법이다. 따라서, 본 연구에서는 유동장의 기하학적 정보만을 가지고 블록의 생성을 자동화할 수 있는 기법으로 한정하고자 한다.

유동장의 형상으로부터 다중-블록 격자의 블록 구성을 결정하기 위해서는, 주어진 유동장의 기하학적 정보를 체계적으로 분석할 수 있는 방법이 필요할 것이다. MAT(Medial Axis Transformation)는 주어진 영역을 기하학적으로 분석하는 알고리즘의 한 예로서, 컴퓨터를 이용한 형상 인식 연구 분야에서 널리 사용되는 기법이다. Medial Axis(MA)란 Fig. 1의 예처럼 주어진 영역의 경계에 내접하는 최대 원들의 중심 궤적을 말한다. 영역의 경계를 따라서 충분히 밀집되어 분포된 점들에 대한 Delaunay 삼각화를 통하여 MAT를 근사적으로 얻을 수 있음이 Armstrong에 의해서 제안되었다.[10] 그의 알고리즘에 따르면, 근사 MAT를 얻은 후 특이점들, 즉 branch point와 end point 등을 찾아내고 그러한 특이점들과 MA궤적의 형상 정보로부터 대상 영역을 보다 작은 하부 영역들로 분할할 수 있다.

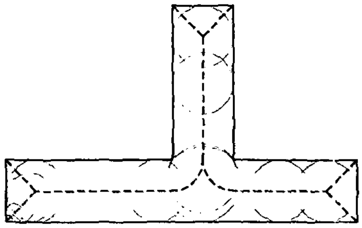
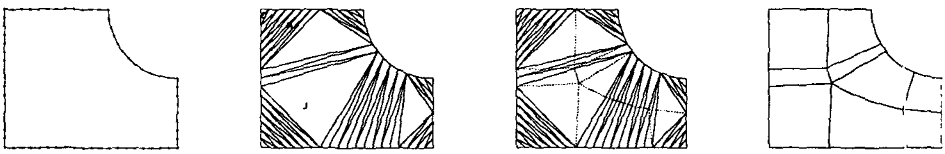


Fig. 1 A domain with its Medial Axis and inscribing circles

본 논문에서 제안하는 방법에서도 Armstrong의 기법처럼 경계점들에 대한 Delaunay 삼각화가 사용되지만, 본 방법에서는 훨씬 단순하고 쉬운 방법에 근거하여 그 삼각형들을 이용하여 블록 생성 작업이 이루어진다. 본 기법에 의한 블록 자동 생성 과정의 한 예를 Fig. 2에서 보여주고 있다.



(a) (b) (c) (d)

Fig. 2 Block generation procedure: (a) Domain boundary with boundary points distributed on it, (b) Delaunay Triangulation showing three types of triangles, (c) Triangles with edges for block boundary, (d) Block boundaries

경계점들에 대한 삼각화가 이루어지고 나면, 두 가지 예외를 제외하고는 삼각형들의 대부분은

두 개의 이웃한 삼각형을 가지고 있다. 그 두 가지의 예외들은, 코너에 위치한 삼각형과 세 개의 서로 다른 경계에 꼭지점을 가진 삼각형이다. 편의상, 두 개의 이웃한 삼각형을 가진 삼각형들을 "normal triangle"이라 부르고, 다른 두 예외를 각각 "corner triangle"과 "junction triangle"이라 부르도록 하자. Corner triangle은 한 개의 이웃만을 가지는 반면, junction triangle은 세 개의 변 모두에서 이웃한 삼각형들을 가지고 있다. 이처럼 세 가지 유형의 삼각형들을 Fig. 2(b)에서 각각 "N", "C", 그리고 "J"로 표시하여 보여주고 있다.

본 기법에 의한 블록 생성과정을 살펴보면 다음과 같다.

① 경계를 따라서 경계점들을 분포시킨다. (Fig. 2(a))

② Delaunay 삼각형화를 수행하고, 각 삼각형의 종류를 찾아낸다. (Fig. 2(b))

③ Junction triangle들에 대해서 외심과 각 꼭지점을 연결하는 선분들을 구한다. (Fig. 2(c))

④ Junction triangle들의 외심에서 시작되어 이웃한 삼각형들의 외심들을 차례로 잇는 다중 선분들을 구한다. (Fig. 2(c))

⑤ 앞에서 구한 다중 선분들은 corner triangle에서 끝나거나, 또는 junction triangle에서 끝나도록 되어있다. Corner triangle에서 끝나는 다중 선분들은 버린다. (Fig. 2(c))

⑥ 유동장의 경계선과 3)과 5)의 선분들을 처리하여 네 개의 변으로 이루어진 블록들을 구한다. (Fig. 2(d))

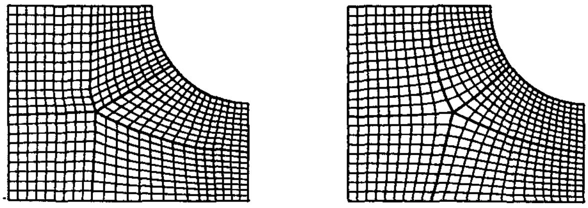
결과적으로 보면, junction triangle의 외심들은 여러 개의 블록들의 꼭지점으로서 공유되는 점이 됨을 알 수 있다. 위에서 얻어진 블록 경계들은 여러 블록들간의 위상학적인 구성을 알려주는 중요한 결과이기는 하지만, 그 물리적 형상과 위치가 전체적으로 보아 양질의 격자계를 보장할 수는 없으므로, 대상 영역 전체에 걸쳐 완만하고 양질의 다중-블록 정렬 격자를 생성하기 위해서는 다음과 같은 작업이 추가적으로 이루어진다.

3. 격자 생성과 격자점 재분포

일단 블록 경계들이 얻어지면, 각 블록에 대해서 정렬 격자를 생성한다. 이때, 격자선들은 블록과 블록간에 C^0-연속성(위치 연속성)을 지니도록 생성된다. 각 블록에 대한 격자 생성 기법으로는 대수적 기법이나 편미방 기법 등 여러 종류의 격자 생성 기법들 중 적절한 방법을 이용하면 될 것이다. 그러나, 앞에서도 언급했듯이 얻어진 블록 경계들의 물리적 위치는 전체 격자계의 질을 향상시킬 수 있도록 재설정되어야 한다. 본 연구에서는, 위의 방법에 따라 얻어진 블록 경계들을 이용하여 각 블록에 대한 정렬 격자를 대수적 기법을 이용하여 생성한 후, 그것을 초기 조건으로 취하는 타원형 격자 생성 기법을 전체 격자계에 적용하여 반복 계산을 통해 원만하고 양질의 격자계를 얻어낸다. 이때, 블록간 경계를 부유 경계(floating boundary)로 취급하여 블록간 경계들의 최종적인 형상과 그 위의 격자점의 최종 위치가 타원형 편미분방정식의 해로 결정되도록 하였다. 따라서, 블록간 경계도 타원형 편미분 방정식의 해로서 얻어지므로 그 결과 격자는 초기 격자에서 보장하기 힘들었던 C^1-연속성(기울기 연속성)이 블록간 경계에서 얻어지게 된다. 본 논문에서 제시하는 예들은 TFI(transfinite interpolation) 대수적 기법을 초기 격자 생성에 사용하였고, 재분포된 최종 격자 생성을 위해서는 Laplace-타입의 타원형 격자 생성 기법을 사용하여 구한 것들이다. 앞의 블록 생성 과정에서 예로 들었던 형상에 대한 초기 격자계와 최종 격자계를 Fig. 3에서 보여주고 있다.

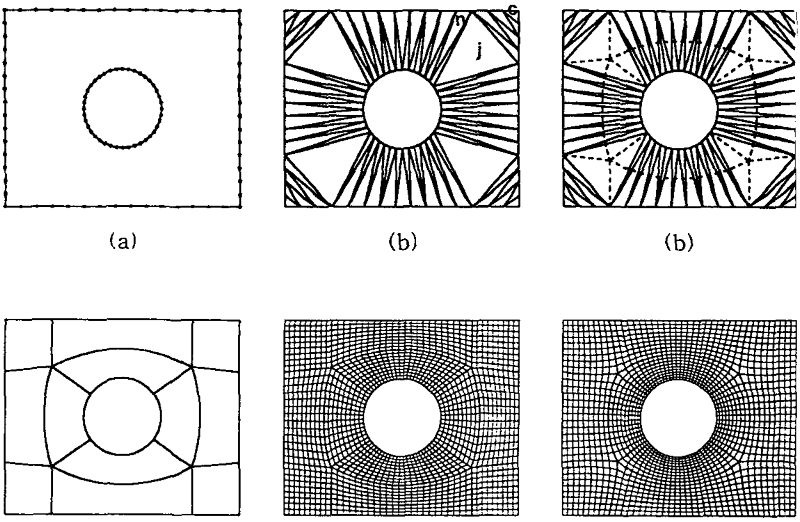
앞에서 설명한 자동 격자 생성 과정을 사각형 외부 경계내에 원형의 내부 경계를 가진 영역에 대해서 적용한 예를 Fig. 4에서 보여주고 있다. 즉, Fig. 4(a)의 경계를 따라서 분포된 경계점들을 Delaunay 삼각형화를 통하여 영역 전체를 삼각형들로 분할하고(Fig. 4(b)), 앞에서 설명된 알고리즘에 따라서 Fig. 4(c)의 점선으로 나타난 다중 선분들을 구한 후, Fig. 4(d)에서와 같이 4개의 변을 가진 블록들을 구성한다. 각 블록에 대해서 대수적 기법을 적용하여 초기 격자계를 얻어내고 (Fig. 4(e)), 타원형 격자 생성 기법을 적용함으로써 Fig. 4(f)와 같은 최종적인 격자계를 얻어낼

수 있다.



(a) Initial grids (b) Final grids

Fig. 3 An example of grid redistribution by elliptic grid generation scheme



(a) (b) (b)

(d) (e) (f)

Fig. 4 An example for a rectangular region with a circular body

4. 격자 생성예 및 토론

우선 본 기법을 단순한 다각형 영역에 적용하여 보기로 하자. 즉, Fig. 5에서처럼 3각형 형상과 5각형 형상에 대해서 적용해보면, 우선 3각형 형상의 영역에 대해서 정렬 격자를 생성할 경우 세 개의 블록으로 구성된 격자계가 일반적이고도 적절한 선택이 될 것임을 알고 있고 본 기법의 결과 또한 그러한 예상에서 벗어나지 않음을 보여 준다. Fig. 5(a)의 두꺼운 선으로 보여진 블록 경계들은 타원형 기법에서 부유 경계로 처리된 후 새로운 위치에 자리잡음을 Fig. 5(b)의 최종 격자계로부터 알 수 있다. Fig. 5(c)는 5각형 영역에 대해서 본 기법이 생성해 내는 최종 격자계의 예를 보여주고 있다.

다음의 격자 생성 예로는 일련의 원형 내부 물체를 가진 원형 형상에 대한 경우로서, 영역 경계 형상을 Fig. 6(a)에서 보여주고 있다. 본 기법의 알고리즘에 따라 Delaunay 삼각형화의 결과로 얻어진 블록 경계들(Fig. 6(b))과 TFI 대수적 격자 생성 기법에 의한 초기 격자계(Fig. 6(c))를 보여주고 있고, Laplace-타입 타원형 기법에 의한 최종 격자계가 Fig. 6(d)에 나와있다. 본 연구를 위해서, 앞에서 설명한 블록 생성 기법과 대수적 격자 생성 기법 및 타원형 격자 생성 기법을 자동

적으로 적용할 수 있는 프로그램을 구성하여서, 일단 유동장 형상이 입력되면 정해진 기준 격자점 수를 가진 최종 격자계가 사용자의 추가적인 작업없이 자동적으로 생성될 수 있도록 하였다.

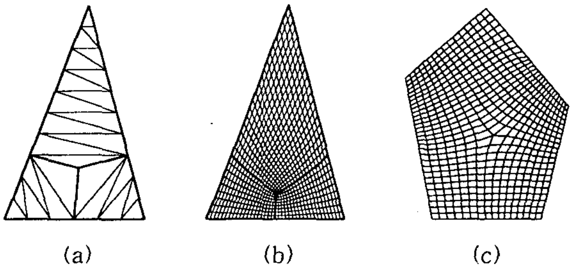


Fig. 5 Examples for simplified polygonal regions: (a) Delaunay triangulartion and block boundaries for a triangular region, (b) Final grid for a triangular region, (c) Final grid for a pentagonal region

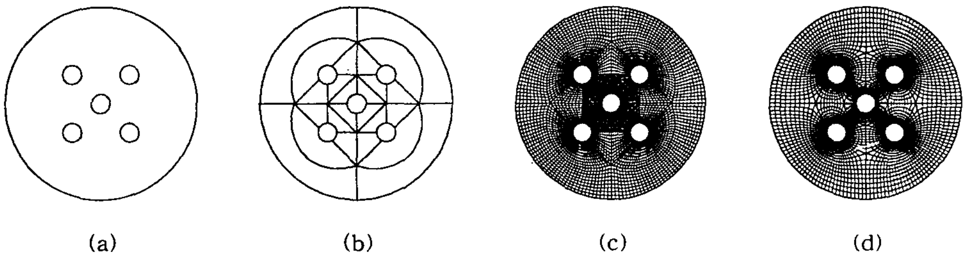


Fig. 6 Example of multiple cylinders in a circular outer boundary: (a) Domain boundary, (b) Block boundaries, (c) Algebraic grid system, (d) Final grid system

다음은 앞의 예와 유사하지만, 외부형상이 Fig. 7(a)에서와 같이 사각형 형상일 경우에 적용해 보았다. 본 연구에서 사용된 코드는 동일한 알고리즘으로부터 Delaunay 삼각화 작업 후 Fig. 7(b)와 같은 블록 경계들을 생성하고 있음을 보여주고, 초기 격자계와 최종 격자계는 각각 Fig. 7(c)와 (d)에서와 같이 얻어지게 된다. 앞의 두 가지 예에서 Fig. 6(d)와 Fig. 7(d)의 최종 격자계들을 비교해보면 본 기법에 의한 다중-블록 정렬 격자들이 주어진 영역의 모양에 따라서 적절히 결정되고, 격자선들이 경계 형상에 맞추어 정렬되고 있어서 전체적으로 질좋은 격자계를 생성하고 있음을 알 수 있다.

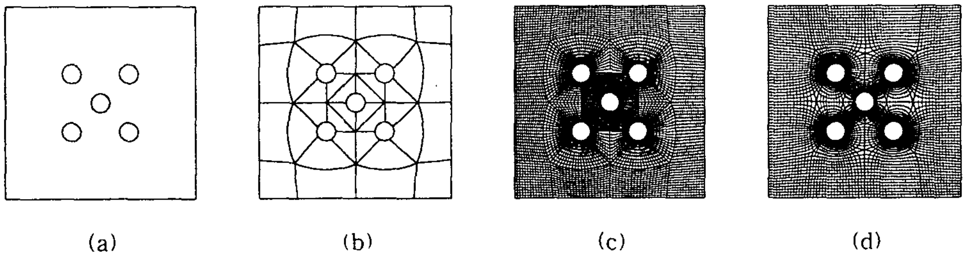
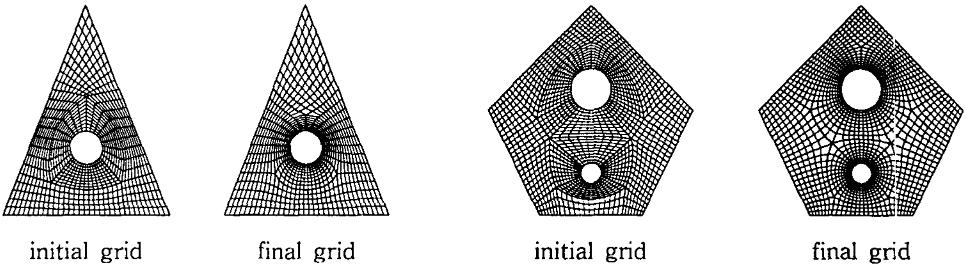


Fig. 7 Example of multiple cylinders in a rectangular outer boundary: (a) Domain boundary, (b) Block boundaries, (c) Algebraic grid system, (d) Final grid system

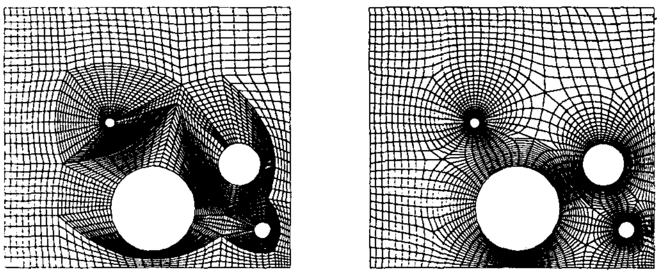
다음으로는, 삼각형 형상 속에 원형 내부 물체가 있는 경우에 대한 본 기법의 격자 생성 결과를 초기 격자계와 최종 격자계를 Fig. 8(a)에서 보여주고 있고, 5각형 형상 속에 원형 물체가 두 개 있는 경우에 대한 초기 및 최종 격자계를 Fig. 8(b)에서 보여 주고 있다.



(a) Triangular shape with a cylinder (b) Pentagonal region with 2 cylinders

Fig. 8 Examples of polygonal regions with cylindrical inner boundaries

마지막 예로서, 사각형 형상의 외부 경계 속에 불규칙적으로 위치하고 있는 4개의 원형 물체가 있는 경우에 대한 격자 생성 예이다. 손쉽게 블록 형상들이 얻어지고, 그 결과를 이용하여 대수적 기법으로 생성된 격자계를 Fig. 9(a)에서 보여주고 있다. 여기서도 확인할 수 있듯이 얻어진 블록 형상들은 위상학적으로는 중요한 의미를 갖지만, 물리적으로는 격자계의 질을 보장하지 못함을 알 수 있다. 따라서, 블록간 경계들을 부유 경계로 처리하여 격자점의 재분포가 필요함을 제시하고 있고, 본 연구에서 사용된 Laplace-타입 타원형 격자 생성 기법을 적용하여 얻어진 Fig. 9(b)의 최종 격자는 초기 격자에 비하여 훨씬 개선된 격자질과 완만한 격자선들을 확인시켜주고 있다.



(a) Initial grids (b) Final grids

Fig. 9 Examples of rectangular region with 4 arbitrarily distributed cylinders of different sizes

5. 결론

일반적인 2차원 영역에 대한 다중-블록 정렬 격자의 생성을 자동으로 수행할 수 있는 단순하면서도 강건한 기법에 대하여 살펴보았다. 본 기법은 대상 영역의 경계를 따라서 적절히 분포된 경계점들에 대한 Delaunay 삼각화를 통하여 대상 영역을 분할하고, 영역을 분점하고 있는 삼각형들의 기하학적 정보 및 종류에 따라서 추가적인 가공을 함으로써 블록 생성을 자동적으로 수행할 수 있었다. 일단 블록 경계들이 구해지면, 대수적 기법에 의해서 초기 격자를 생성하고 이를 초기치로 하는 타원형 격자 생성법을 적용하여 반복 계산을 수행함으로써 각 블록의 내부 격자점들만이 아니라, 블록간 경계들도 타원형 편미분 방정식의 해로서 얻어내고 따라서 최종적인 격자계는 전반적으로 완만하면서 질좋은 격자계를 얻을 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

[1] T. Schonfeld and P. Weinerfelt, "The Automatic Generation of Quadrilateral Multi-Block Grids by the Advancing Front Technique," Proceedings of the 3rd International Conference on Numerical Grid Generation in CFD, 1991

[2] T. Schonfeld, P. Weinerfelt, and C. Jenssen, "Algorithms for the Automatic Generation of 2-D Structured Multi-Block Grids," NASA CP-3291, 1995

[3] M.E.M. Stewart, "Domain-Decomposition Algorithm Applied to Multielement Airfoil Grids," AIAA Journal, Vol. 30, No. 6, pp 1457-1461, 1992

[4] S.E. Allwright, "Techniques in Multiblock Domain Decomposition and Surface Grid Generation," Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics '88, Pineridge Pres, pp 559-568, 1988

[5] S.E. Allwright, "Multiblock Topology Specification and Grid Generation for Complete Aircraft Configurations," AGARD-CP-464, 1990

[6] J. Dannenhoffer, "A Block-Structuring Technique for General Geometries," AIAA 91-0145, 1991

[7] J. Dannenhoffer, "A New Method for Creating Grid Abstractions for Complex Configurations," AIAA 93-0428, 1993

[8] J. Dannenhoffer, "Automatic Blocking For Complex Three-Dimensional Configurations," NASA CP-3291, 1995

[9] B. Kim, "Development of Automatic Multi-Block Grid Generation Technique Adaptive to The Boundary Geometry of Flow Fields," Computational Fluid Dynamics JOURNAL, vol. 6, No. 4, pp 527-536, 1998

[10] C. Hoffmann, "Geometric Approaches to Mesh Generation," Modeling, Mesh Generation, and Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations, Ed. by I. Babuska, J. Flaherty, W. Henshaw, J. Hopcroft, J. Oliger, and T. Tezduyar, Springer-Velag, pp 31-51, 1995