

유한 썸기 에 의한 충격파 산란 현상의 수치적 연구

Numerical Study on the Shock Wave Scattering Phenomenon Behind a Finite Wedge

장세명¹⁾, ○장근식²⁾

Se-Myong Chang and Keun-Shik Chang

The shock wave diffracted behind a finite wedge is partially scattered after interacting with a starting vortex originated from the sharp vertex of the wedge. The shock is divided into the accelerated and decelerated shocks. The decelerated shock then interacts with the small vortexlets brought about by the vortex instability, producing weak compression waves. The shock-shock interaction produces Mach stems. Through this successive process, the shock attenuated. In this study, these complicated shock phenomena are computed using Euler equations and compared with experimental results obtained by the authors.

1. 서론

Schardin [1]은 일정 속도로 입사하는 평면 충격파가 삼각 프리즘 형상인 유한 썸기와 부딪쳐 반사 (reflection) 및 회절 (diffraction)되는 압축성 유동 문제를 음영 사진법 (shadowgraphy)으로 가시화 하였다. 이들 실험 사진들에서는 마하 스템, 미끄럼면, 팽창파, 와동 등 압축성 유동 요소들의 생성과 이들 사이의 매우 복잡한 상호 간섭 (interaction)들이 잘 나타나 있다. 그러나 이 실험에서는 유한 썸기의 크기에 비해 비교적 작은 충격파관을 사용한 탓에, 충격파관의 벽면으로부터 파생하는 파동 잡음 (noise)에 의하여 관찰 영역이 크게 훼손되어 후기 간섭 현상의 관찰을 불가능하게 하고 있다. 한편 Sivier 등 [2]은 삼각형 비정렬 적용 격자에 바탕을 둔 FEM-FCT 방법을 이용한 Euler 방정식의 풀이를 통하여 Schardin의 실험을 수치 모사로 재현했다. 하지만 이 역시 높은 해상도로서 충격파의 구조와 초기 간섭 현상을 잘 보여 주고 있으나, 원래의 실험 모델이 갖는 잡음에서 벗어난 깨끗한 현상을 계산하지는 못하고 있다.

본 연구에서 저자들은 썸기의 한 변 길이 20 mm 에 비해 비교적 큰 세로 높이 150 mm 의 충격파관에서 Schardin의 실험을 재현하였다. 다음 사각형 비정렬 적용 격자에 바탕을 둔 유한 체적법을 이용하여 Euler 방정식을 수치적으로 풀이하고, 비정상 유동의 모습을 시간의 흐름에 따라 시뮬레이션하였다. 수치 해석의 결과는 가시화 사진과 비교, 검증되었고, 이들은 서로 보완적인 관계로서 복잡한 압축성 유동 문제를 해석할 수 있게 되었다.

2. 수치 해석의 방법

2.1 초기 조건, 지배 방정식과 경계 조건

먼저 본 문제의 기하학적 조건으로, 한 변의 길이가 20 mm 인 정삼각형 모양이며 중심 면에 대해 선대칭인 유한 썸기를 모델로 사용하였다. 유동 조건으로는 충격파 마하 수 $M_s=1.34$, $\gamma=1.4$ 인 압축성 비점성 유동을 가정하였다. 1 차원 리만 (Riemann) 문제의 엄밀해로부터, 충격파를 뒤따르는 유동의 속도는 $u_p=170$ m/s ($M_p=0.45$: 아음속)이며 충격파 전후 압력비는 $p_2/p_1=1.928$ 이다.

2 차원 비정상 압축성 비점성 유동을 모사하기 위해 다음의 Euler 방정식을 지배 방정식으로 채택하였다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = 0 ; \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

여기에서

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ E \end{pmatrix}, \quad F_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ u_j (E + p) \end{pmatrix}, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_i u_i$$

(1) 식의 경계 조건으로는, 벽면에서는 수직 방향의 속도가 0 이라는 미끄럼 조건을 사용하였다. 입구 및 출구에서는 초기치가 교란되기 이전에 계산이 끝나므로 특별한 경계조건이 필요하지 않다.

1) 학생 회원, 한국과학기술원 (KAIST) 항공우주공학과

2) 회원, 한국과학기술원 (KAIST) 항공우주공학과

2.2 수치 기법

먼저 (1)식에서 전달 항 (convective term)의 수치 유속 (numerical flux)은 다음과 같은 Roe의 근사 리만 해법으로 선형화 시킬 수 있다.

$$f^*_{k+1/2} = \frac{1}{2} (F_k + F_{k+1}) - \frac{1}{2} |\lambda_{k+1/2}| (w_{k+1} - w_k) \quad (2)$$

여기에서 k 는 cell index, f^* 는 수치 유속, λ 는 자코비언 행렬 $\partial F_j / \partial U_j$ 의 특성치 (eigenvalue), 그리고 w 는 대각화 변환된 보존 변수들이다. 이웃한 두 cell 에서의 w 값의 차는 경계면에서의 자코비언 행렬의 특성 벡터 (eigenvector)와 같은 방향이며, 그 비례 계수로는 이웃한 두 cell 에서의 밀도에 각각 제곱근을 취한 값들에 대한 가중 평균으로 표현된 수식들을 사용한다 [3]. 그러나 이 방법은 리만 문제의 해로 비 물리적인 파동들까지 제시할 수 있다는 결점이 있다. 엔트로피 고정을 통해 팽창파면에서의 비 물리적인 충격파를 억제하기는 하지만, 엔트로피의 구배가 큰 곳에서는 해가 깨져서 흔히 carbuncle 이라고 하는 비 물리적인 충격파를 생성한다.

이 문제를 해결하기 위해 Harten 등이 제안한 방법은 다음의 HLLC 방법이다. 이 방법에서는 (2) 식의 수치 유속을 다음과 같이 쓴다 [4].

$$f^*_{k+1/2} = \frac{\lambda^+ F_k - \lambda^- F_{k+1}}{\lambda^+ - \lambda^-} + \frac{\lambda^+ \lambda^-}{\lambda^+ - \lambda^-} (w_{k+1} - w_k) \quad (3)$$

여기에서

$$\lambda^+ = \max(\lambda_{\max}, 0), \quad \lambda^- = \min(\lambda_{\min}, 0)$$

그리고 λ_{\max} , λ_{\min} 은 각각 cell 경계면 $k+1/2$ 에서의 최대 그리고 최소값을 갖는 특성치를 의미한다. 이 방법은 매우 안정하기는 하지만 리만 문제의 풀이에 있어서 접촉 불연속면 (contact discontinuity)을 무시하기 때문에 확산 오차 (diffusion error)가 매우 커진다는 단점이 있다. 따라서 본 연구에서는 이 두 가지 방법을 적절하게 사용하였다. 예컨대 특별히 고해상도가 필요한 부분에서는 (2) 식 (Fig. 5(a)-(f) 참조)을, 그리고 이외 충격파 유동장에서는 (3) 식 (Fig. 3(a)-(e) 참조)을 사용하였다.

(2) 또는 (3) 식은 공간에 대한 1 차 정확도의 수치 유속을 나타낸 것으로, 시간 및 공간에 대한 2 차 정확도를 얻으려면 다음과 같은 MUSCL 확장을 한다 [5].

$$\bar{u}_k = u^n_k - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f^*_{k+1/2} - f^*_{k-1/2}) \quad (4a)$$

$$u^L_{k+1/2} = \bar{u}_k + \frac{1}{2} \psi^L (u_k - u_{k-1}) \quad (4b)$$

$$u^R_{k+1/2} = \bar{u}_{k+1} - \frac{1}{2} \psi^R (u_{k+2} - u_{k+1}) \quad (4c)$$

여기에서 ψ^L , ψ^R 은 소산 오차 (dissipation error)를 방지하기 위한 기울기 제한자 (slope limiter)이다. $0 \leq \psi \leq 2$ 이며, 본 연구에서는 TVD 안정성이 검증된 van Leer의 제한자를 사용하였다. 따라서 2 차 정확도의 수치 유속은 다음과 같다.

$$f^{*(2)}_{k+1/2} = f^* (u^L_{k+1/2}, u^R_{k+1/2}) \quad (5a)$$

$$u^{n+1}_k = u^n_k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^{*(2)}_{k+1/2} - f^{*(2)}_{k-1/2}) \quad (5b)$$

이와 같은 방법으로 (5b) 식을 이용하여 시간 적분을 수행한다.

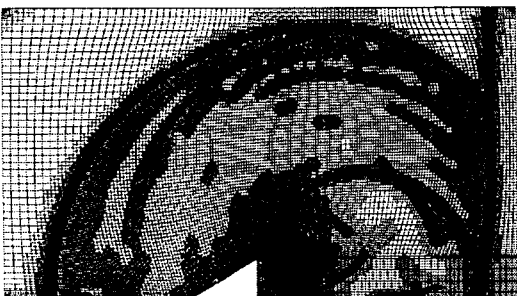


Fig. 1 Quadrilateral unstructured adaptive grid

2.3 적응 격자 기법

앞 절의 수치 해법에 적응 격자 기법을 적용하기 위해서는 (4b), (4c) 식에 약간의 수정이 필요하다. 즉 이웃한 cell 들의 크기가 변함에 따라 물리량들의 구배 (gradient)를 구할 때 그 거리를 고려해 준다.

본 연구에서는 사각형 비정렬 격자를 사용하였다. 한 개의 cell 은 단계 (level)를 지니고 있어 밀도의 1

차 구배에 따라 이 값이 일정 이상이면 하위 단계로 분할 (refine)되고 이하이면 상위 단계로 병합 (unrefine)된다. 각 단계의 연결 상태 (connectivity)의 자료 구조는 linked list 와 4 중 트리 (quadtree)로 이루어진다. 분할시 4 개의 아들 cell 은 어미 cell 로부터 물리량들을 공동으로 상속받고, 반대로 병합시에는 4 개 cell 의 면적 가중 산술 평균값을 어미 cell 의 물리량으로 정한다. 이 방법은 삼각형 격자에 비해 단순한 기하학적 형상에 대해서 양질의 격자를 연속적으로 생성할 수 있다는 장점이 있다.

비정상 문제의 경우 매 세 번의 반복 (iteration)마다 분할 및 병합을 실시하고, 분할 단계는 5 혹은 6 단계로 제한하였다. Fig. 1 은 한 계산 순간의 이러한 사각형 적응 격자계의 예를 보인 것이다. 이것은 Fig. 3(e) 를 계산하는 데 쓰였다.

3. 충격파 산란 현상

3.1 전반적인 현상에의 묘사

이 문제에서 나타나는 주요 파동 요소들 즉 입사 충격파와 삼중점, 미끄럼면, 반사파, 와동 등 산란파를 제외한 주요 파동 현상의 구성 요소들을 영문 첫 글자 (initial) 기호를 사용하여 Fig. 2 에 표시하였다. Fig. 3(a)-(e) 는 충격파가 물체에 충돌한 이후 각 시간대에서의 유동의 발달 모습을 좌측의 홀로그래피 간섭 사진 (실험)과 우측의 등밀도선 (계산)으로 평행하게 보인 것이다.

Fig. 3(a) 에서, 입사 충격파 (I)는 썰기의 경사면 위에서 단순 마하 반사 (single Mach reflection)를 일으킨다. 즉, 입사 충격파는 삼중점 (T_1)에서 반사 충격파 (R)와 마하 스템 (M_1)으로 나뉘어져, R 은 전방을 향해 원형으로 반사되고 M_1 은 경사면을 따라 오르며 전파된다.

Fig. 3(b) 는, 마하 스템 (M_1)이 썰기의 뒷면 꼭지점을 돌아 나오면서 크게 회절되고, 이 영향으로 흐름의 방향이 꺾이어서 강한 와동 (V)이 형성됨을 보여준다. 이 와동은 삼중점 (T_1)에서 나온 접촉 불연속인 미끄럼면 (S_1)이 시계 방향으로 감긴 것이다. 또한 충격파 회절의 반작용으로 생겨난 팽창파인 확장팬 (E)이 썰기 전방으로 전파된다.

Fig. 3(c) 에서, 마하 스템 (M_1)이 썰기의 증앙 대칭면에 대해서 정규 반사 (regular reflection)된 후 와동 영역으로 들어가 강한 충격파-와동 상호 간섭을 일으키는 관찰할 수 있다. 입사 충격파가 썰기에서 멀어지면서, 대칭면에 대한 마하 스템의 정규 반사는, 반사된 충격파의 곡률 반경이 커짐에 따라 Fig. 3(d) 에서 보듯이 마하 반사로 변한다.

Fig. 3(d) 는, 대칭면에서 반사된 충격파가 단순 마하 반사된 것임을 보여준다. 새로운 마하 스템 (M_2)은 새로운 삼중점 (T_2)을 유도하고, 이는 삼중점으로부터 발생하는 미끄럼면 (S_2) 및 이의 대칭면에 대한 mirror image와 더불어 삼각형 영역을 형성한다. 한편 삼중점 (T_2)에서 반사된 충격파 (R_1)는 와동 (V)과 간섭하면서, 와동의 강한 회전 운동에 의하여 심하게 급격지고 산란되어 가속 충격파 (A)와 감속 충격파 (D)로 나뉘어진다.

마지막으로 Fig. 3(e) 에서, 시간이 흐름에 따라 와동이 확장되고, 입사 충격파는 확장된 마하 스템 (M_2)을 통하여 평면 형상을 회복해 감을 볼 수 있다. 와동 둘레의 밀도장에서는, 간섭 사진과 수치 해석 결과 모두에서 보듯이, 충격파 - 와동의 상호 간섭때문에 와동을 중심으로 생겨난 약한 산란파들로 인하여 방사상 (radial direction)의 찌그러짐(wiggle)이 주기적으로 나타난다. 그리고 썰기의 바로 뒤에서 두 개의 와동 사이에 강한 국지적 압축 영역이 나타난다.

3.2 충격파 산란 현상

충격파가 산란되어 가는 충격파-와동의 후기 간섭 현상은 기존의 연구에서 확실히 밝혀지지 않은 부분이었다. 본 연구에서는 Fig. 3(c)-(e) 의 시간대에 대해 보다 정밀한 수치 계산을 통하여 이 현상을 규명해 보기로 하였다 (Fig. 5(d)-(f) 참조). 이의 실험 가시화 사진 (shadowgraph)에 대해서는 참고 문헌 [1] 과 [6] 을 참조하라.

Fig. 4 는 이 연구에서 규명한 충격파 산란 현상의 개략도이다. 주와동과 외부 유동의 경계에서는 Kelvin-Helmholtz 불안정성에 의하여 소와동 (vortexlets)이 형성된다. Fig. 4(a) 의 D_1 , D_2 , ... 와 같이, 소와동과 감속 충격파 (D) 사이에서는 이들의 상호 간섭으로 인하여 불연속적인 압

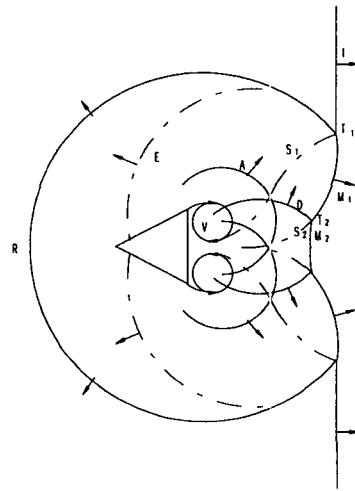


Fig. 2 Schematic diagram for the shock-vortex interaction

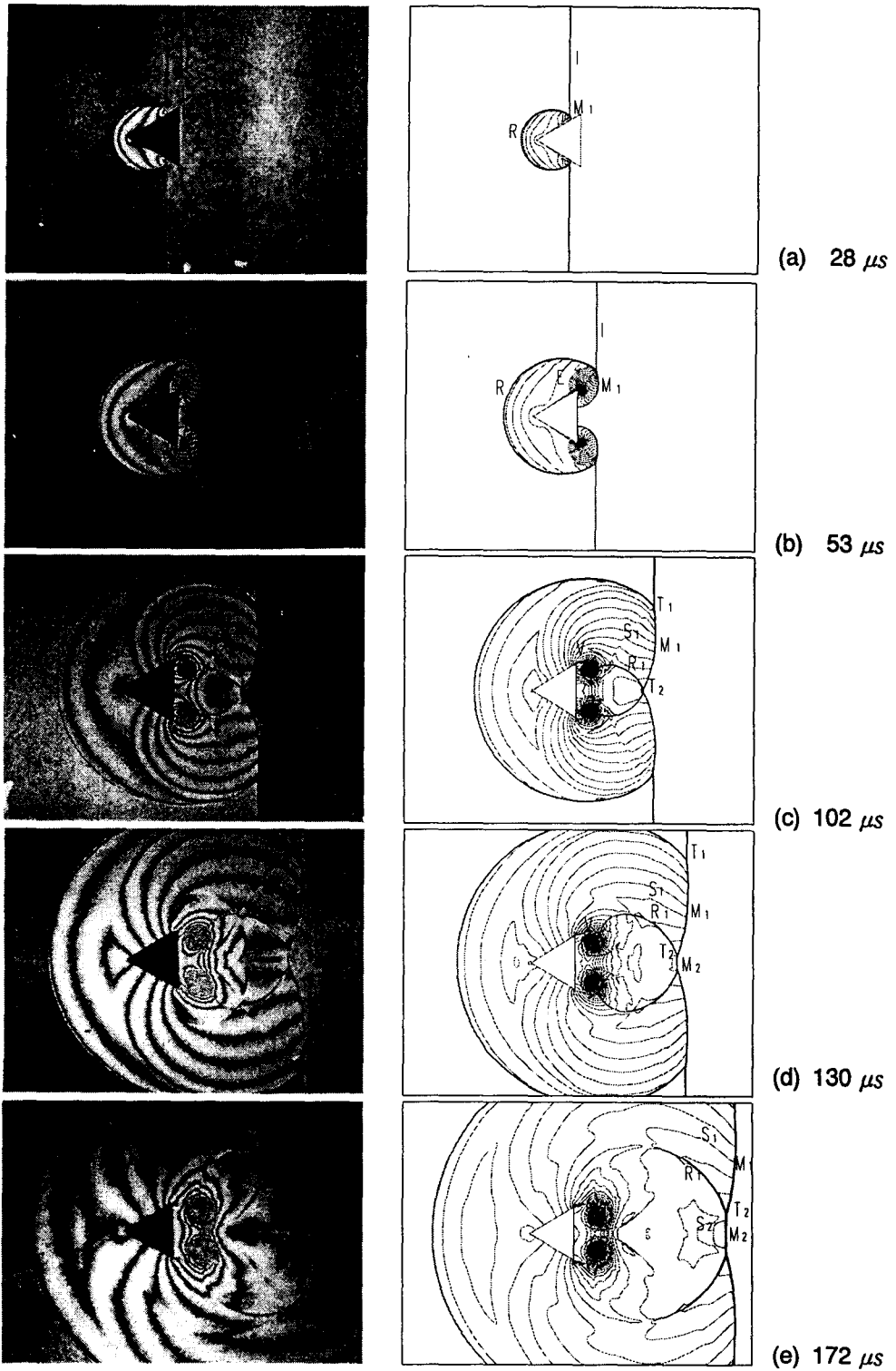


Fig. 3 Experiment (left) and computation (right), for $M_s = 1.34$

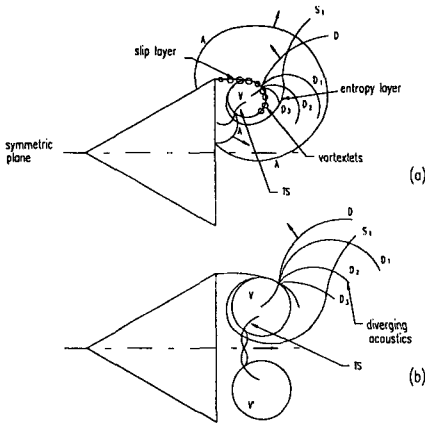


Fig. 4 Schematic diagram for the shock scattering:
 (a) earlier stage.
 (b) later stage.

충격파들이 발생되는데 이들은 크기 (intensity)가 매우 미약하므로 발산 음향파 (diverging acoustics: DA)라고 부르기로 한다. 발산 음향파는 이심원 형상을 이루며 외부 유동으로 퍼져 나간다.

한편 썩기와 와동 사이의 좁은 영역에서는 국지적인 압축 영역이 발생하는데, 여기에서 와동 중심을 꿰뚫은 감속 충격파 (D)의 일부가 점차로 충격파의 원형을 회복해 간다. 이를 관통 충격파 (transmitted shock : TS)라고 하고, Fig. 4(b)에서는 대칭면 양측에서 발생한 TS가 서로 반대 방향으로 회전하는 쌍동이 와동 사이에 불잡혀 한 개의 강한 압축파로 병합되는 과정을 나타내고 있다.

Fig. 5(a)에서는 앞 절에서 설명한 가속 충격파 (A)와 감속 충격파 (D)를 잘 보여준다. 즉 진행 방향에 대해서, 와동 (V)의 회전에 의해 유도되는 순풍을 받는 A는 가속되고, 역풍을 받는 D는 감속된다. Fig. 5(b)에서 A는 와동과 썩기 뒤 수직벽 사이의 좁은 틈을 빠져나가 외부로 방사되어 나간다. 한편 와동 중심에 불잡힌 D의 일부는 Fig. 5(c)-(e)의 과정을 거쳐 썩기 뒤 압축 영역에서 그 원형을 되찾으면서 TS가 형성된다. 그리고 주와동의 외곽에서는 소와동과 DA들이 관찰된다. TS는 Fig. 5(f)에서 형상 변환 (morphological transformation)을 보여준다. 그러나 중심 대칭면 근방에서는 아직 충격파의 모습을 갖추지 못했음을 알 수 있다.

이상의 과정을 통하여 입사 충격파는 산란되고 약화되어 간다.

4. 결론

본 연구에서 저자들은 복잡한 압축성 유동의 문제가 유한한 압축성 요소들의 상호 간섭에 의해 발생하는 한 예를 보이고 이를 수치적으로 해석하였다. 물론 여기에는 실험 데이터의 많은 보완과 검증이 있었다. 수치 시뮬레이션은 실험으로 구할 수 없는 여러 가지 다양한 물리량의 데이터를 제공하며 실험에 비해 재생성 (reproductivity)이 뛰어나다는 장점을 지니고 있다. 따라서 수치 해석이 적절하게 이용된다면 현재 유동 실험에 소요되는 시간과 경비의 상당 부분을 이로 대체할 수 있게 된다. 특히 적응 격자를 사용한 높은 해상도의 수치 모사는 충격파의 산란 현상과 같은 미약한 물리량의 변화를 적절하게 가시화할 수 있도록 도와준다. 이 논문에서는 탐구 범위를 비점성 유동으로 제한했으나, 추후 코드의 Navier-Stokes 방정식 풀이로의 확장을 통하여 점성 효과까지 고려할 예정이다.

감사의 글

이 연구의 실험 부분은 한국과학재단의 핵심기초연구 (KOSEF 951-1006-028-2) 지원에 의하여 이루어졌다. 재단의 학술 지원에 감사드린다.

참고 문헌

[1] H. Schardin, "High Frequency Cinematography in the Shock Tube," *Journal of Photo Science*, vol. 5, pp. 19-26, 1957. ; revied in Van Dyke ed., *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Stanford, California, 1982.
 [2] S. Sivier, E. Loth, J. Baum, R. Lohner "Vorticity Produced by Shock Wave Diffraction," *Shock Waves*, vol. 2, pp. 31-41, 1992.
 [3] P. L. Roe, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, vol. 43, pp. 357-372, 1981.
 [4] S. M. Ko, K. S. Chang, "Resonant Pulsatile Flows of a Hartmann-Sprenger Tube," *Computational Fluid Dynamics Journal*, Japan Society of CFD, vol. 6, no. 4, pp. 33-45, 1998.
 [5] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, vol. 2, pp. 493-596, John Wiley & Sons, 1992.
 [6] 장세명, 장근식, "샤딘 문제에서의 충격파-와동 상호 간섭에 관하여," *한국항공우주학회지*, vol. 26, no. 7, pp. 8-17, 1998.

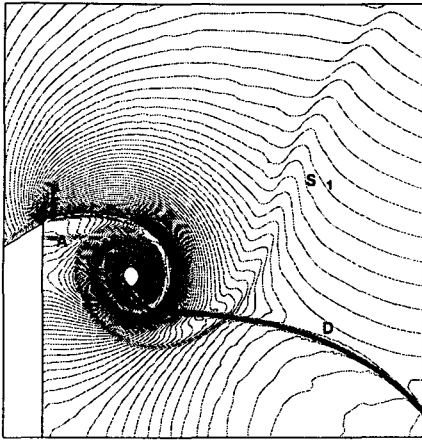
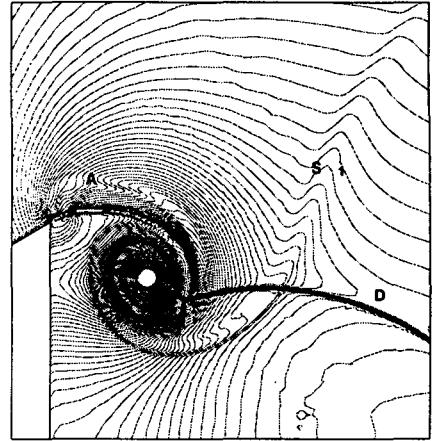
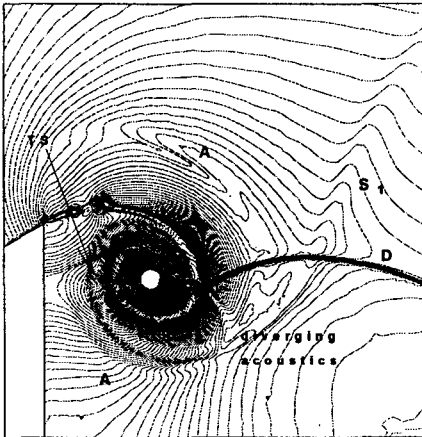
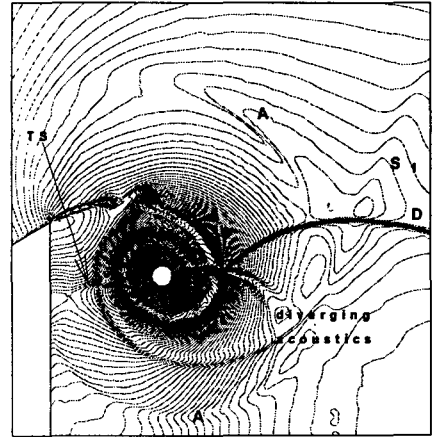
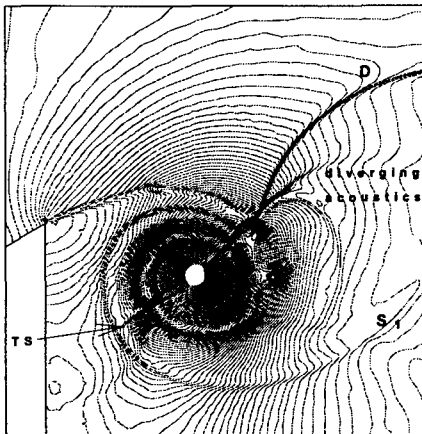
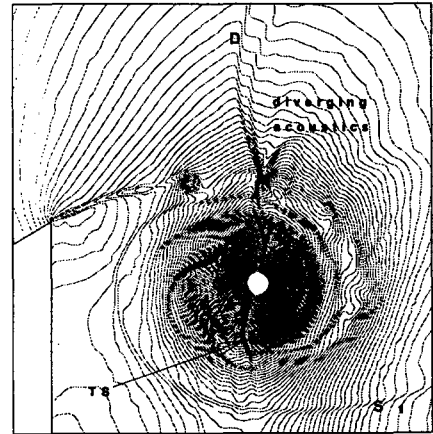
(a) 89 μ s(b) 95 μ s(c) 101 μ s(d) 107 μ s(e) 130 μ s(f) 172 μ s

Fig. 5 A magnified view of shock scattering: computational isopycnics