2000년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2000.7.17-20

지정된 디스크 영역 내 극 배치법을 이용한 비선형 시스템 제어를 위한 퍼지 제어기

이 상 준 이 남 수 주 영 훈 박 진 배*
군산대 공대 전자정보공학부 *연세대 공대 전기 및 컴퓨터 공학과

Fuzzy Controller for Nonlinear Systems Using Pole Placement in a Specified Disk

Sang-jun Lee Nam-su Lee Young-Hoon Joo
School of Electronic & Info. Eng. Kunsan Univ. *Dept. of Electrical & Computer Eng., Yonsei Univ.

Abstract - This paper addresses a fuzzy controller for nonlinear systems control using a pole placement in a specified disk. In the method, we linearize a nonlinear plant about nominal operating points and represent it using TS fuzzy model and formulate the controller rules. A feedback control law for a local model is determined using a pole placement in a specified disk(α:center γ:radius) region so that the closed loop system is stable. A nonlinear system can be controlled by combining fuzzy controller with a pole placement scheme which can be used to modify the transient response such as damping ratio and overshoot. A stability of overall fuzzy control system is guaranteed in the Lyapunov sense. Finally, it is shown that the proposed method is feasible through a computer simulation.

1. 서 론

퍼지 제어는 제어 대상 시스템이 수학적으로 모델링하기 어렵거나 강한 비선형을 보이는 경우, 또는 외부 환경이 불확실한 경우 등에 대해 강인한 성능을 보여준다. 즉 내재된 비선형성 때문에 선형제어기에 비해 효과적인 제어가 가능하고, 많은 경우 비선형 프로세서의 제어에 효과적으로 대처할 수 있다는 장점이 있다[1]-[4].
Cao[2]는 일반적인 퍼지 모델 기반 제어기를 설계하고 해석하기 위해서 현대 제어 이론을 적용했고 Wong [3]-[4]등도 좀 더 체계적인 퍼지 제어기의 설계를 위해 TSK퍼지 모델에 기반한 제어기의 설계와 안정도 분석을 행하였다.
한편 지정된 영역에 폐루프 시스템의 극점을 위치시키는 방법은 제동비나 오버슈트와 같은 시스템의 과도응답을 개선하는데 효과적이다. Nguyen[6]은 시스템의 극점을 복소 좌반면의 디스크 영역에 위치시켰으며 Shieh[7]와 Joo[8]는 복소 좌반면의 섹터 영역에 극점을 위치시키는 방법을 퍼지 제어기에 응용하였다.
본 논문에서는 지정된 디스크 영역 내에 극점을 배치시키는 방법을 응용한 비선형 퍼지 제어기의 설계 기법을 제안한다. 이 방법은 먼저 비선형 시스템에 대하여 여러 동작점에 대하여 선형화하여 Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현한 후 소위 PDC기법으로 퍼지 제어기 규칙을 작성한다. 각 지역 퍼지 제어기의 궤환 제어 이득은 극배치법을 사용하여 구한다. 전체 퍼지 제어기는 모든 지역 퍼지 제어기를 조합하여 얻는다. 결과적으로 생성된 전체 퍼지 제어기에 대한 안정도는 각 지역 제어기에 대해 공통인 양한정 행렬의 존재성의 문제이다. 이하 본 논문의 전개는 다음과 같다.
2장에서는 TS 퍼지 모델과 퍼지 제어기에 대하여 설명하고, 3장에서 지정된 디스크 영역내 극배치법에 대해 논한다. 4장에서는 제안된 제어기의 안정도 및 성능을 모의 실험을 통하여 검증하고 5장에서 결론을 맺는다.

2. 퍼지 제어 시스템

2.1 TSK 퍼지 모델

비선형 시스템에 대한 퍼지 제어기를 구성하기 위해 먼저 TSK 퍼지모델로써 시스템을 표현한다. TSK 퍼지 모델화하기 위해서는 먼저 시스템을 몇 동작점에서 선형화하여 IF - THEN 규칙으로 표현하는데 이 규칙은 시스템에 대해 부분적인 선형 입출력이며 식(1)과 같이 표현 된다.

Plant Rule i :
If $x_1(t)$ is M_1^i and...and $x_n(t)$ is M_n^i
Then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ (1)

이 퍼지 모델의 최종 출력은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{q} \omega_i(t)\,(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{q} \omega_i(t)} \tag{2}$$

$$\omega_i(t) = \prod_{j=1}^{n} M_j^i(x_j(t))$$

여기에서, M_j^i $(j=1,2,\ldots,n)$은 i번째 퍼지 집합, q는 규칙의 수, $x(t)\in R^n$는 상태 변수, $u(t)\in R^m$는 제어입력, $A_i\in R^{n\times n}$와 $B_i\in R^{n\times m}$는 시스템에 대한 i번째 지역 모델, $x_1(t),\ldots,x_n(t)$는 전제부 변수이다.

2.2 퍼지 제어기 규칙

퍼지 제어 규칙을 작성하기 위해 PDC 설계기법을 적용하는데 이것은 식(1)과 동일한 전제부를 사용하며 제어기의 i번째 규칙은 다음과 같다.

Controller Rule i :
If $x_1(t)$ is M_1^i and...and $x_n(t)$ is M_n^i
Then $u(t) = -K_i x(t)$ (3)

여기서, $K_i = [k_1^i,\ldots,k_n^i]$는 궤환 이득 벡터이다. 식(3)의 퍼지 제어기의 최종 출력은 다음과 같다.

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^{q} \omega_i(t)\,K_i x(t)}{\sum_{i=1}^{q} \omega_i(t)} \tag{4}$$

식(4)를 식(2)에 대입해서 다음과 같은 전체 폐루프 시스템을 얻는다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\omega_i(t)\,\omega_j(t)\{A_i - B_iK_j\}x(t)}{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\omega_i(t)\,\omega_j(t)} \qquad (5)$$

2.3 퍼지 시스템의 안정도

전체 폐루프 시스템 (5)에 대한 안정도 분석은 다음과 같은 충분 조건으로 주어진다.

정리 1[1]:퍼지 제어 시스템(5)는 다음의 두 개의 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P가 존재한다면 넓은의미에서 점근적으로 안정하다.

$$\{A_i - B_iK_i\}^T P + P\{A_i - B_iK_i\} < 0, \quad i = 1, \ldots, q \qquad (6)$$

$$G_{ij}{}^T P + PG_{ij} < 0, \quad i < j \le q \qquad (7)$$

단, $G_{ij} = \dfrac{\{A_i - B_iK_j\} + \{A_j - B_jK_i\}}{2}$

이러한 퍼지제어기에서 설계문제는 조건식 (6)과 (7)을 만족하는 궤환이득 $K_i(i = 1, 2, \ldots, q)$를 구하는 것이다. 본 논문에서는 다음에 설명되는 지정된 디스크 영역내 극배치법을 이용하여 궤환이득을 구한다.

3.지정된 디스크 영역내 극배치법

3.1 서론

다음과 같은 i번째 부분공간의 가제어 연속시간 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \qquad (8)$$

단, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$은 상태 벡터, 입력 벡터이다. 이 시스템에 대해 본 논문에서 고려하는 문제는 폐루프 시스템의 극점을 그림1과 같은 중심이 $-\alpha + j0\ (\alpha > 0)$이고 반경이 $\gamma > 0$ 인 디스크 영역내에 위치시키고 다음과 같은 이차 성능 기준을 최소화하는 상태 궤환 제어 법칙을 구하는 것이다.

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^\infty [x_i^T(t)Q_i x_i(t) + u_i^T(t)R_i u_i(t)]dt \qquad (9)$$

단, Q는 양반한정 대칭행렬이고, R은 양한정 대칭행렬이다.성능 기준 (9)를 최소화하는 상태 궤환 제어 법칙 $u(t)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u(t) = -K_i x(t) = -R_i^{-1}B_i^T P_i x(t) \qquad (10)$$

여기에서 K는 i번째 부분 공간에 대한 궤환이득이고 P는 양반한정 대칭행렬로써 다음 Riccati 방정식의 해이다.

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + Q_i = 0 \qquad (11)$$

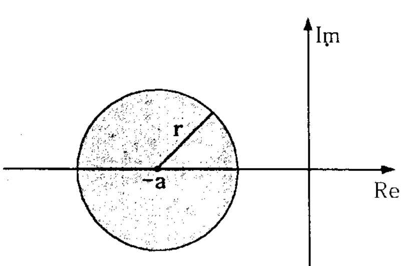

그림 1 지정된 디스크 영역

3.2 극배치 계획

다음과 같은 Hamiltonian 행렬 H는 허수축에 대칭인 n개의 양의 고유값과 n개의 음의 고유값을 가진다고 알려져 있다.

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \qquad (12)$$

이 행렬의 음의 고유값은 다음과 같은 최적 상태 궤환 제어 시스템의 고유값과 동일하다.

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \qquad (13)$$

따라서 $(A - BK)$의 고유값 대신 행렬 H의 고유값을 배치하는 것이 가능하다. 이는 다음과 같은 비특이 행렬 T를 이용하여 행렬 H를 다음과 같이 등가 변환함으로써 시작한다.

$$\overline{H} = T^{-1}HT \qquad (14)$$

여기서 $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_4 \end{bmatrix}$, $\overline{H} = \begin{bmatrix} \overline{H_1} & \overline{H_2} \\ \overline{H_3} & \overline{H_4} \end{bmatrix}$이고 $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}$ $\overline{H_4}, T_1, T_2, T_4$는 $n \times n$요소를 갖는 행렬이다.

다음 정리를 통해서 지정된 디스크 영역내 극배치를 만족케 하는 하중 행렬 Q를 얻게 되고 이를 이용하여 최적 제어 법칙을 구하게 된다.

정리 2[6]:반경 $\gamma_{lef.i}$와 $\gamma_{rig.i}$로 된 두 개의 디스크가 있을 때, 행렬 $\overline{H_4}$와 $\overline{H_3}$가 다음 조건을 만족할 경우 행렬 $\overline{H}$의 음의 실수부의 고유값은 $D(-\alpha, \gamma)$인 디스크 내에 놓이게 된다.

$$\overline{H_4} = [\ \overline{h}_{4ij}] < 0, \quad (i, j = 1, \ldots, n) \qquad (15)$$

$$\| [\overline{H_3} \quad \overline{H_4} + \alpha I] \|_\infty \le \gamma \qquad (16)$$

여기서 $\gamma_{lef.i}$ 와 $\gamma_{rig.i}$는 행렬 $\overline{H}$의 양과 음의 실수부의 고유값을 포함하는 디스크의 반경이며, I는 적당한 차원을 갖는 단위 행렬이고 $\|\cdot\|_\infty$는 H_∞ norm이다.

보조정리1[6]:반경 $\gamma_{lef.i}$와 $\gamma_{rig.i}$인 두 원의 집합은 다음의 Infinity norm을 만족하면 분리된 것이다.

$$\| [\overline{H_1} - \alpha I \quad \overline{H_2}] \|_\infty < 2\alpha - \gamma \qquad (17)$$

단, $\overline{H_2} = \overline{H_3}^{-1}(A^2 - \overline{H_4}^2) + T_1^{-1}BR^{-1}B^T T_1^{-1}$이다.

정리 3[6]:행렬 M이 행렬 A를 대각화한다면 지정된 영역 $D(-\alpha, \gamma)$내 극배치를 만족하는 행렬 Q는 다음과 같이 얻어진다.

$$Q = (M^{-1})^T T_1^{-2}\overline{H_3}M^{-1} \qquad (18)$$

상태 궤환 제어 법칙 (10)은 시스템(1)의 폐루프 극점을 지정된 디스크 $D(-\alpha, \gamma)$내에 배치한다.

결과적으로 지정된 영역내 극배치법에 대한 문제는 다음과 같은 단계를 따른다.

단계1:행렬 A를 대각화한다.

단계2:식(16)을 만족하도록 $\overline{h}_{4ij} < 0$, $\overline{h}_{3ij} > 0$인 행렬 $\overline{H_4} = diag(\ \overline{h}_{4ij})$, $\overline{H_3} = diag(\ \overline{h}_{3ij})$을 선택한다.

단계3:식(17)을 만족하도록 $T_1 = diag(t_{1ij})$ (단, $t_{1ij} \ne 0$)와 $R = R^T > 0$을 선택한다.

I단계4:식(18)로부터 하중 행렬 Q를 구한다.

단계5:식(10)으로부터 최적 궤환 제어 법칙을 구한다.

4. 모의 실험

본 논문에서 도립 진자 시스템을 예로 든다. 이 시스

템의 동역학식은 다음과 같다 [7].

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g\sin(x_1) - amlx_2^2\sin(2x_1)/2 - a\cos(x_1)u}{4l/3 - aml\cos^2(x_1)}$$

여기서, x_1은 수직축과 펜듈럼이 이루는 각(라디안)이고, x_2는 각속도, $g=9.8m/s^2$는 중력가속도이며, $m=2.0kg$은 펜들럼의 질량, $M=8.0kg$은 수레의 질량이고, $2l=1.0m$는 펜들럼의 길이, 그리고 u는 수레에 가해지는 힘이다. 또한 $a=1/(m+M)$이다. 이 시스템을 근사화하기 위한 TS퍼지 모델은 다음과 같다 [5].

Rule1:

If $x_1(t)$ is *about* 0, Then $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

Rule2:

If $x_1(t)$ is *about* $\pm\pi/2$, Then $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$

여기서,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}$$

이고 $\beta=\cos(88^\circ)$이다. Rule 1과 Rule 2에 대한 멤버쉽 함수는 그림 2와 같다.

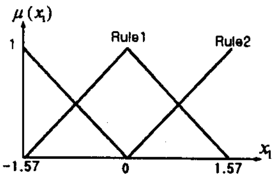

그림 2 멤버쉽 함수

극점 배치를 위한 디스크 영역은 중심을 -5, 반경을 2로 지정했으며 이 영역으로 극점을 위치시키는 하중 행렬 Q_1과 Q_2는 다음과 같다.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 11.3162 & -1.4108 \\ -1.4108 & 0.6543 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 5.2250 & -0.7939 \\ -0.7939 & 0.5582 \end{bmatrix}$$

각 지역 폐루프 시스템의 극점은 (-4.1586,-4.1611)과 (-3.0594,-3.0594)으로 지정된 영역에 위치함을 알 수 있다. 이 때의 궤환 이득과 안정도를 보장하는 공통 양한정 행렬 P는 다음과 같다.

$$K1 = [-196.0577 \quad -47.1449]$$
$$K2 = [-3575.3388 - 1168.6347]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.4196 & 0.0278 \\ 0.0278 & 0.0122 \end{bmatrix}$$

그림 3과 그림 4는 막대의 초기 각도를 45도(0.7854 rad)으로 했을 때 얻은 결과이다.

5. 결 론

본 논문에서는 지정된 디스크 영역 내에 극배치하는 방법을 비선형 퍼지 제어 시스템에 응용하는 방법을 제안하였다. 비선형 시스템은 여러 동작점에서 선형화하여 TS퍼지모델로 표현할 수 있고 이 모델을 기반으로 하여 퍼지 제어기 규칙을 작성할 수 있다. 각 지역 모델에 대한 궤환 제어 이득은 현대 제어 기법중 시스템의 과도응답 성능을 양호하게 하는 극배치 방법을 이용하여 구하게 된다. 대표적인 비선형 시스템인 도립진자에 적용한 결과로부터 제안한 제어기가 우수한 성능을 가지고 있음을 알 수 있다.

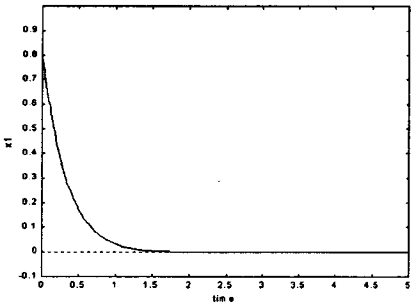

그림 3 제안된 제어기의 출력응답(x1)

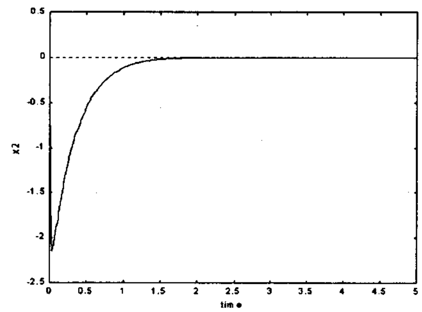

그림 4 제안된 제어기의 출력응답(x2)

[참 고 문 헌]

[1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control", IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15, No 1, pp. 116-132, 1985.

[2]S.G.Cao, N.W.Rees, and G.Feng. "Stability Analysis and Design for a Class of Continuous-Time Fuzzy Control System",Int.J.Control.Vol.64, No.6, pp1069-1087. 1996

[3] L.K.Wong,F.F.Leung, and P.K.S.Tam, "Stability Design of TS Model Based Fuzzy Systems", IEEE-FUZZ1997, pp.83-86, 1997.

[4] C. Li, P. C. Chen, and C.K. Chen, "Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", Fuzzy Sets and Systems, Vol.57, pp.125-140, 1993.

[5] F.H.F.Leung, L.K.Wong and P.K.S.Tam, "Fuzzy Model Based Controller for an Inverted Pendulum", Electronics Letters, Vol.32, pp.1683-1685,1996

[6] V.G.Nguyen and H.S.Kim, "A Pole Assignment in a Specified Disk by using Hamiltonian Properties" Automation & Systems Engineering.Vol.4,No.6,1998

[7] L.S.Shieh, H.M.Dib and S.Ganeson, "Continuous-time quadratic regulator and pseudo-continuous-time quadratic regulator with pole placement in a specific region", IEE Proceedings(D), Vol.134(5), pp.338-346, 1987.

[8] Y.H.Joo,L.S.Shieh,G.Chen,"Hybrid State-Space Fuzzy Model-Based Controller with Dual-Rate Sampling for Digital Control of Chaotic System",IEEE Transaction on Fuzzy System, Vol.7.No.4.1999