

웨이브렛 변환과 유전 알고리즘을 이용한 퍼지 모델링

* 이 승 준*, 주 영 훈**, 박 진 배*

*연세대 공대 전기·컴퓨터공학과, **군산대 공대 전자정보공학부

Fuzzy Modeling Using Wavelet Transform and Genetic Algorithm

Seung-Jun Lee*, Young-Hoon Joo**, Jin-Bae Park*

*Dept. of Electrical & Computer Engineering, Yonsei Univ.

** School of Electronics & Information Engineering, Kunsan National Univ.

Abstract - This paper addresses the use of a nonlinear modeling procedure which construct a wavelet-based fuzzy model using genetic algorithm. A fuzzy inference system has the functional equivalence with a wavelet transform. Therefore, a wavelet-based fuzzy model using GA inherits the advantage of wavelet transform. Hereby, its performance is promoted. By help of the ability of GA to search the optimum globally, parameters of wavelet transform is determined closely to the optimal point. The feasibility of the proposed fuzzy model is proved by modelling a highly nonlinear function and comparing it with previous research.

1. 서 론

수학적으로 모델을 구하려 하는 경우 일반적으로 미분방정식이 광범위하게 사용되어 왔다. 하지만, 많은 실제적인 문제는 많은 비선형성과 시변수를 포함하고 있기 때문에 정확한 미분방정식을 구하는 것이 쉽지 않을 뿐만 아니라 비교적 정확한 모델을 구하더라도 모델 근사화에 의해 효용성이 감소한다. Zadeh [1]에 의해 최초로 도입된 퍼지 논리 개념은 이런 문제를 극복할 수 있는 해를 제시하였고 각계에서 새로운 가능성을 보여주었다. 이에 이어 Wang과 Zeng [2-3]은 퍼지 기저 함수(Fuzzy Basis Function; FBF)의 선형 합으로 퍼지시스템을 표현하였고 Lin [4]은 퍼지 모델의 변형을 통하여 이산 웨이브렛 변환과의 동가의 모델을 획득하였다.

Lin이 이용한 웨이브렛 변환은 입자물리학, 조화해석학, 신호처리학의 여러 이론에 기반하고 있으며 푸리에 변환에 비하여 불연속점과 고주파 성분을 갖는 신호에 대해서 물리적 상태를 분석하는데 효율적이다. Daubechies [5]등의 공헌으로 발전한 웨이브렛 이론은 1990년대에 들어 Donoho [6]가 Unconditional Basis라는 개념으로 웨이브렛이 모든 신호의 기저함수로 사용될 수 있다는 것을 증명함으로써 비약적인 발전을 하게 되었다. 이와 같은 이유로 현대의 디지털 신호와 영상 압축, 기본적인 여러 알고리즘 수행의 속도 증진과 디지털 신호의 잡음을 제거하기 위해 웨이브렛이 사용되고 있다.

웨이브렛이 Donoho의 Unconditional Basis를 기초로 한 웨이브렛 기반 퍼지 모델링은 퍼지 추론 시스템의 FBF와 후건부의 일부분을 곱하면 웨이브렛 함수와 같도록 FBF와 후건부를 구성하여 웨이브렛 변환과 동가가 될 수 있게 함으로써 웨이브렛 변환이 갖고 있는 장점을 공유할 수 있다. 따라서, 보다 최적의 퍼지 모델을 구할 수 있다. 하지만 웨이브렛 함수에 대한 계수 또는 퍼지 추론 시스템의 후건부의 상수부분과 웨이브렛 함수의 파라미터 또는 퍼지추론 시스템의 소속함수의 파라미터를 동정해야하는 문제가 있다. 이 경우 전문가적인 지식에 의존하는 것은 시간의 소모가 크므로 유전 알고리즘(Genetic Algorithm; GA)을 이용하여 파라미터와 구조를 동시에 동정하는 방법을 제안한다.

2. 이산 웨이브렛 변환

모든 신호 $f(x)$ 는 식 (1)과 같이 기저함수들의 선형합으로 나타낼 수 있다.

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_k \sum_{j_0}^{\infty} d_j(k) \Psi_{j,k}(x), \quad (1)$$

여기에서, $\varphi_{j,k}(x)$ 를 스케일 함수라 하고, $\Psi_{j,k}(x)$ 를 웨이브렛 함수라 한다. 결론적으로 식 (1)의 전개에서 첫 번째의 합은 저해상도의 근사화이고 두 번째의 합은 고해상도 근사화가 된다. 모든 j, k 에 대해 $\varphi_{j,k}(x)$ 와 $\Psi_{j,k}(x)$ 가 서로 직교한다면 식 (1)의 계수 $c_j(k)$ 와 $d_j(k)$ 를 내적의 합으로 구할 수 있다. $\Psi_{j,k}(x)$ 을 구하는 것을 웨이브렛 변환이라 하며 $L^2(R) \rightarrow L^2(R^2)$ 의 매핑으로 저역통과필터인 스케일 함수와 고역통과필터인 웨이브렛 함수로 나눌 수 있다. 이러한 다해상도 수식은 신호를 자세한 성분들로 분해하여 나타냄으로써 신호를 시간-주파수로 표현할 수 있도록 한다. 따라서, 식 (1)의 $\Psi_{j,k}(x)$ 는 식 (2)로 나타낼 수 있다.

$$\Psi_{j,k}(x) = a^{-j/2} \Psi(a^{-j}x - bk) \quad (2)$$

식 (1)은 식 (3)의 다해상도 해석에 의해 잘 설명될 수 있다

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2, \quad (3)$$

여기에서, V_0 는 $\varphi_k(x)$ 에 의해서 Span된 공간이고 V_j 는 $\varphi_{j,k}(x)$ 에 의해 Span된 공간이다. 웨이브렛 Span된 부공간을 식 (4)으로 정의하면,

$$V_j = W_j^\perp, \quad (4)$$

따라서, W_j 는 V_j 의 Orthogonal Complement이므로 식 (5)를 얻을 수 있고 그림 1과 같은 포함관계를 갖고 식 (6)과 같이 모든 함수를 웨이브렛 함수의 선형합으로 나타낼 수 있다는 것을 의미한다.

$$L^2 = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (5)$$

$$f(x) = \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(x) \quad (6)$$

하지만, 다차원의 웨이브렛 변환은 수행하기 힘들기 때문에 다차원 웨이브렛 프레임이 연구되어 왔다 [7-8]. 다차원 웨이브렛 함수를 단일 차원의 웨이브렛 함수의 텐서곱으로 나타내면 식 (7)와 같다.

$$\Psi(x) = \Psi_1(x_1) \cdot \dots \cdot \Psi_n(x_n). \quad (7)$$

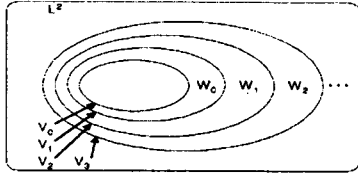


그림 1 함수공간의 포함관계

즉, 단일 차원의 웨이브렛 변환은 n개의 직교방향으로 분리되어 진다.

$$\Psi(\omega) = \Psi_1(\omega_1) \cdot \dots \cdot \Psi_n(\omega_n), \quad (8)$$

여기에서, $\Psi(\omega)$ 는 $\Psi(x)$ 의 푸리에 변환이며 식 (9)의 admissibility 조건을 만족하여야 한다.

$$\int \frac{|\widehat{\Psi}(\omega_i)|^2}{|\omega_i|} d\omega_i < \infty, \quad (9)$$

이 식은 음과 양의 무한대에서 0으로 수렴하는 각각의 $\Psi(x_i)$ 에 대해서 식 (10)과 같이 적분한 값이 0인 것과 같다

$$\int \Psi(x_i) dx_i = 0. \quad (10)$$

한편, 웨이브렛 프레임이 되기 위해서는 식 (9)의 조건도 만족하여야 한다 (8).

$$A\|A\|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, \Psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|A\|^2, \quad (11)$$

여기에서 $A > 0$, $B < \infty$ 이다.

따라서, 식 (8)과 식 (9)를 만족하는 $\Psi(x_i)$ 를 웨이브렛 프레임으로 설정하면 된다. 본 논문에서는 mother 웨이브렛 함수로 식 (12)의 'Mexican Hat'을 이용하였다.

$$\Psi(x_i) = a \left(1 - a_i x_i^2\right) e^{-\frac{a_i x_i^2}{2}} \quad (12)$$

식 (12)를 식 (2)와 식 (7)에 대입하면 식 (13)을 얻을 수 있다

$$\Psi_{j,k} = a^{-\frac{j_i}{2}} a_i [1 - a_i (a^{-j_i} x_i - b_{i,k_1})^2] e^{-\frac{a_i (a^{-j_i} x_i - b_{i,k_1})^2}{2}} \dots a^{-\frac{j_n}{2}} a_n [1 - a_n (a^{-j_n} x_n - b_{n,k_n})^2] e^{-\frac{a_n (a^{-j_n} x_n - b_{n,k_n})^2}{2}} \quad (13)$$

3. 퍼지 모델링

퍼지 규칙은 시스템의 특성을 인간의 언어적인 표현으로 나타낸 것이며 0차의 TS 퍼지 모델을 사용할 경우 다음과 같다.

Rule i: If x_1 is A_{i1} , ..., x_n is A_{in} , then y_i is w_i ; (i=1,...,c) (14)

식 (14)에서 Rule i는 i번째 규칙, x_j 은 j번째 입력 변수, y_i 은 i번째 출력 변수, 그리고 A_{ij} 는 j번째 입력의 i번째 규칙에 대한 소속 함수로 가우시안 함수를 정의하고 결론부는 실수치 w_i 로 정의한다.

식 (14)의 규칙에서 후건부를 변형함으로써 웨이브렛 기반 퍼지 모델의 규칙을 나타내는 식 (15)를 얻을 수 있다.

Rule i: IF x_1 is A_{i1} , ..., x_n is A_{in} , THEN y_i is $d_{i1}(1-a_{i1}x_1^2)(1-a_{i2}x_2^2) \dots (1-a_{in}x_n^2)$ (15)

퍼지 모델의 형태를 그림 2와 같이 변형하여 여러개의 퍼지 규칙 기저를 갖도록 한다.

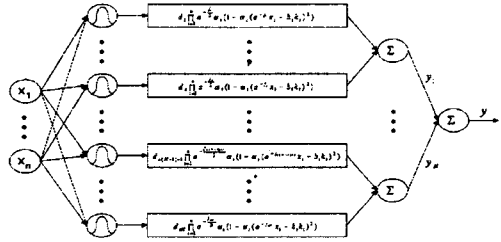


그림 2 퍼지 모델의 구조

여러개의 퍼지 규칙 기저를 갖는 퍼지 추론 시스템에서 임의의 퍼지 규칙 기저에 대한 출력은 식 (16)과 같이 FBF의 선형합으로 표현할 수 있다.

$$y_i = \sum_{j=1}^c B_j(x) y_j \quad (16)$$

식 (15)의 식을 식 (16)에 적용하면 식 (17)을 얻을 수 있다.

$$y_i = \sum_{j=1}^c B_j d_j a^{-\frac{j_1}{2}} a_{i1} (1 - a_{i1} (a^{-j_1} x_1 - b_{i,k_1})^2) \dots a^{-\frac{j_n}{2}} a_{in} (1 - a_{in} (a^{-j_n} x_n - b_{i,k_n})^2) \quad (17)$$

여기에서, $B_i = \frac{\prod_{k=1}^n A_{ik}(x_k)}{\sum_{j=1}^c \prod_{k=1}^n A_{jk}(x_k)}$ 이며, d_i 는 실수이다. 따라서, 최종적인 출력 y 는 식 (18)을 구할 수 있다.

$$y = \sum_{j=1}^c y_j = \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^n d_{j,k} \Psi_{j,k} \quad (18)$$

이 식은 여러 개의 퍼지 규칙 기저를 갖는 퍼지 모델의 후건부를 변형함으로써 이산 웨이브렛 변환과 동가를 갖도록 결정할 수 있다는 것을 나타낸다.

4. GA를 이용한 동정

식 (14)의 가우시안 소속함수의 파라미터와 후건부 계수 d_{ij} 그리고 규칙의 개수를 동시에 동정하기 위해 GA를 이용한다. 그림 3과 같이 암호화를 수행한 후 식 (19)와 같은 적합도 함수를 정의하고 유전 알고리즘을 수행한다.

Individual 1	0.001, 11	0.001, 12	0.001, 13	0.001, 14	0.001, 15	0.001, 16	0.001, 17	0.001, 18	0.001, 19
Individual 2	0.001, 21	0.001, 22	0.001, 23	0.001, 24	0.001, 25	0.001, 26	0.001, 27	0.001, 28	0.001, 29
...
Individual k	0.001, k1	0.001, k2	0.001, k3	0.001, k4	0.001, k5	0.001, k6	0.001, k7	0.001, k8	0.001, k9

그림 3 유전 암호화

여기에서, n은 입력의 개수, c는 최대 규칙의 개수, 그리고 k는 한 세대의 개체군 내의 개체의 개수이다.

$$f = \frac{C_e}{E + \epsilon} + \frac{C_r}{R + \rho} \quad (19)$$

여기에서, C_e , C_r 과 ρ , ϵ 는 경쟁 수준 조정을 위한 상수, E 는 해당 개체의 평균 제곱 오차, ϵ 는 $E=0$ 이 될 경우 적합도 함수의 발산을 방지하기 위한 값이며 R 은 해당 영역 체에서 추출된 퍼지 모델의 규칙 수이다. C_e , C_r 의 값에 따라 퍼지 모델의 정확성을 중요시한다면 그 비를 크게 두고, 규칙 수가 적은 모델을 원한다면 그 비를 작게 둔다.

5. 모의 실험

웨이브렛 변환과 유전 알고리즘을 이용한 퍼지 모델링의 유용성을 검증하기 위해 혼돈 시계열 데이터의 예측을 하였다. 본 논문에서는 Mackey-Class [9]의 시계열 데이터 이용하였으며 이는 다음의 식 (20)으로 획득할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \frac{0.2x(t-\tau)}{1+x^{10}(t-\tau)} - 0.1x(t). \quad (20)$$

$[x(t-18) \ x(t-12) \ x(t-6) \ x(t); \ x(t+6)]$ 의 4개의 입력과 1개의 출력으로 예측 모델을 구하였다. 학습 데이터로 $t=25$ 에서부터 $t=524$ 의 500개의 데이터를 이용하여 웨이브렛 변환과 유전 알고리즘을 이용한 퍼지 모델링 시 세대의 RMSE, 규칙수, 적합도의 변화는 각각 그림 4-6과 같다. 그림 4는 가장 우수한 개체의 학습 데이터에 의한 RMSE값을 나타내고, 그림 5는 파라미터뿐 아니라 규칙수에 대한 동정도 함께 행하여진 규칙수의 변화를 나타낸다. 웨이브렛 변환과 동가이므로 에너지가 몇몇 계수에 집중하여 있게 되어 식 (19)에서 규칙수에 작은 가중치를 두더라도 잘 동정됨을 확인할 수 있다.

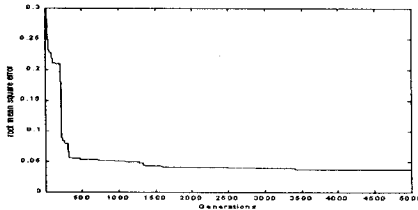


그림 4 RMSE의 변화

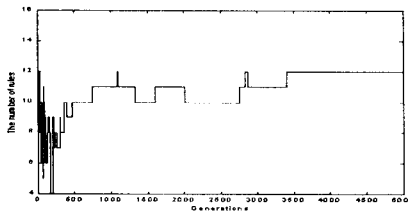


그림 5 규칙수의 변화

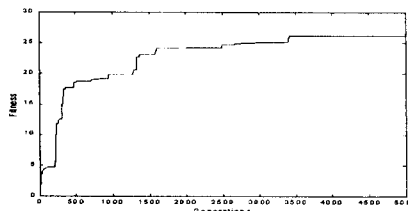


그림 6 적합도의 변화

그림 6은 그림 4의 RMSE와 그림 5의 규칙수를 식 (19)에 대입해서 얻어지는 적합도 값의 변화를 나타내며 그림 5에서는 학습데이터로 얻어진 퍼지 모델을 이용해 $t=525$ 부터 $t=1024$ 까지의 데이터에 대한 실제 출력과 예측출력의 결과를 비교하였다.

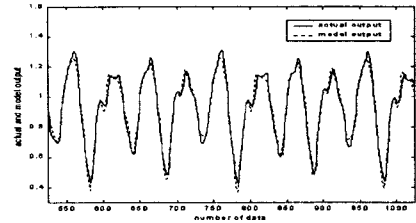


그림 7 실제 출력과 퍼지 모델의 예측출력 비교

6. 결론

본 논문에서는 웨이브렛 변환과 유전 알고리즘을 이용하여 파라미터와 구조를 동시에 퍼지 모델링하는 방법을 제안하였다. 웨이브렛 변환의 고유 특성 즉, 임의의 신호를 웨이브렛 함수의 선형합으로 나타낼 때 에너지가 작은 수의 계수에 집중하므로 작은 규칙수로도 혼돈 시계열 데이터의 예측에 대한 우수한 모델을 구할 수 있었다. 또한, 일반적으로 GA를 이용해 퍼지 모델링의 파라미터와 구조의 동정시에는 작은 수의 입력변수에 대해서는 우수한 퍼지 모델을 획득할 수 있었으나 많은 수의 입력 변수에 대해서는 잘 동정되지 않는 문제점이 있었지만, 본 논문에서는 제안한 웨이브렛 변환과 유전 알고리즘을 이용하여 우수한 퍼지 모델을 획득할 수 있었다.

본 논문은 2000년 두뇌한국사업21 핵심분야에 의해서 지원되었음.

[참고 문헌]

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," Information Control, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [2] L. X. Wang and J. Mendel, Fuzzy Basic Functions, "Universal Approximation, and Orthogonal Least Square Learning," IEEE Trans. Neural Networks Vol. 3, pp. 807-874, 1992.
- [3] X. J. Zeng and M. G. Singh, "Approximation Accuracy Analysis of Fuzzy Systems with the Center-Average Defuzzifier," Proc. FUZZ-IEEE/IFES'95, pp. 109-116, 1995.
- [4] C. K. Lin and S. D. Wang, "Fuzzy Modelling Using Wavelet Transforms," Electronics Letter, Vol. 32, pp. 2255-2256, 1996.
- [5] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis, IEEE Trans. Inform. Theory," Vol. 36, pp. 961-1005, 1990.
- [6] A. Bruce, D. Donoho, H. Y. Gao, "Wavelet Analysis [for Signal Processing]," IEEE Spectrum, Vol. 33, pp. 26-35, 1996.
- [7] A. Benveniste, A. Judisky, B. Delyon, Q. Zhang, Y. Glorennec, "Wavelets in Identification," Proc. SY 10th IFAC Symp. Syst. Identification, Copenhagen, 1995.
- [8] T. Kugarajah, Q. Zhang, "Multidimensional Wavelet Frames," IEEE Trans. Neural Network. Vol. 6, pp. 1552-1556, 1995.
- [9] M. C. Mackey and L. Glass, "Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems," Science, Vol. 19, pp. 287-297, 1977.