

무단 변속기를 위한 비선형 제어 시스템의 설계

박성욱 · 서보혁
 "구미1대학 전기전공 · " 경북대 전자전기공학부

Design of a Nonlinear Control System for Continuously Variable Transmissic

Park. Seong Wook · Seo. Bo Hyeok
 Kumi college · Kyungpook national university

Abstract - In order to operate SI(Spark Ignition) engine at the optimal fuel efficiency, it is necessary to use continuously variable transmission(CVT) which has more excellent fuel consumption property than transmissions of gear box types commonly used. This study introduces new type of nonlinear control approach to control precisely CVT including nonlinear characteristics. The nonlinear controller is basically composed of input-state feedback linearization, which can cancel the nonlinearities included in CVT on specific controllable area, and sliding-mode control. In this paper, good control performance of control system with the nonlinear controller is confirmed with computer simulations.

1. 서 론

가솔린 엔진의 자동차가 생산된 시기에 변속기로서 무단 변속기도 사용되었으나, 신뢰성, 내구성, 제어성 등의 문제점을 고려하여 실용화되지 못하였고 대조적으로 간단한 제어성을 갖는 기어-박스 형태의 수동 변속기와 자동 변속기가 범용으로 사용되었다[1-2]. 그럼에도 불구하고 무단 변속기는 이상적인 변속기로서 연구개발이 계속되어 왔었다. 80년대 후반에 들어와서 금속 벨트식의 무단 변속기가 자동차용의 변속기로 처음으로 실용화되었다[3]. 그러나 그 당시의 무단 변속기는 전달 가능한 토크의 용량이 작았기 때문에 소형 승용차에만 장착되었다. 최근에 들어와서 큰 용량의 토크전달이 가능한 무단 변속기가 개발되어 중형 승용차에도 장착하게 되었다[4]. 엔진의 출력이 일정한 경우에 엔진을 고회전 저토크로 운전하는 것보다 저회전 고토크로 운전하는 것이 마찰을 경감하는 특성을 가지므로 연료의 소비효율이 좋아진다.

그림 1은 엔진 회전수(w_e)와 엔진 토크(T_e)관계를 나타낸 연료 효율곡선이다. 수동 변속기와 자동 변속기를 장착한 자동차에서는 기어의 변속비에 의해서 엔진회전수와 차속이 일정한 관계로 고정된다. 그래서 임의의 차속에 대해서 엔진을 임의의 회전수로 운전하는 것이 불가능하고 동시에 엔진을 그림 1의 최적 연료 효율곡선(optimal fuel efficiency curve)상에서 동작시키는 것도 불가능하게 된다. 이 기어방식과 비교해서 무단 변속기는 엔진 회전수와 차속 관계를 연속적으로 변화시킬 수 있으므로 엔진을 최적의 연료 효율곡선에서 운전시킬 수 있는 장점을 갖는다.

2. 본 론

구동 시스템은 기계적 부분(Σ_1)과 열역학 부분(Σ_2)으로 구성된다. 기계적인 부분은 엔진의 회전 관성, 무단 변속기, 차의 관성과 바퀴의 관성이고 열역학 부분은 다 변수 동력학, 연소, 토크에 해당된다. 시스템을 그림 2에

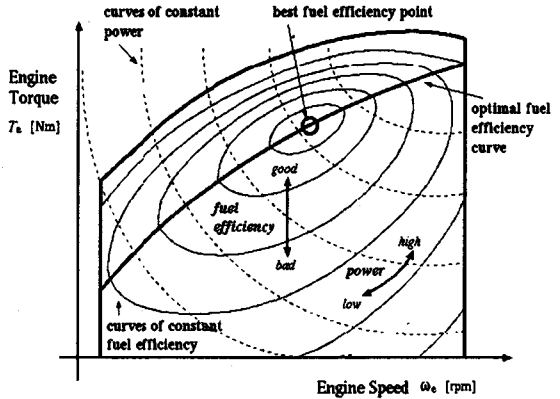


그림 1. SI-엔진의 연료효율곡선.
 Fig. 1. Fuel efficiency curve of SI-engine.

나타내었다. 일반적으로 Σ_2 는 Σ_1 보다 시정수가 적다. 제어기(C_2)는 엔진 토크를 원하는 값으로 유지할 수 있다고 가정한다. 즉 연료 효율곡선(Γ)의 특성이 제어기의 동작에 의하여 항상 최적상태에 있다고 가정한다.

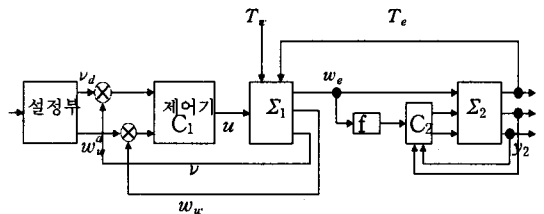


그림 2. 상호관계가 있는 시스템.
 Fig. 2. Coupled system.

$$T_e^d = \Gamma(w_e) \tag{1}$$

그림 2를 무단 변속기를 포함하는 제어 시스템으로 나타내면 그림 3과 같이 된다. 운전자가 페달로 차에 전달한 신호는 설정부를 거쳐 기준 입력신호를 발생한다. 이 신호는 구동축의 속도(w_w)와 변속비(v^d)로 제어계를 동작시키는 기준으로서 페달로에 가해지는 입력신호이다.

본 논문에서는 운전자가 차에 전달하여 발생한 기준 입력신호를 무단 변속기를 사용하여 기준신호를 추종하도록 제어입력(u)를 결정하는 것이다. 그림 3의 제어 시스템에 제어입력을 구하기 위해 동력학을 조사한다. 제어 시스템의 모형을 그림 4에 나타내었다.

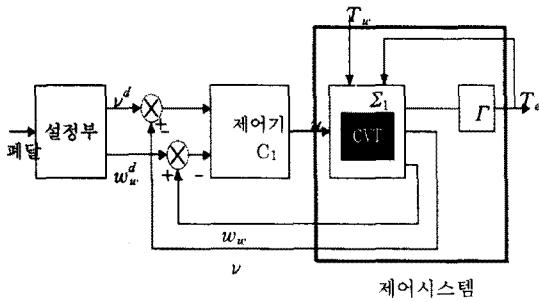


그림 3. 제어 시스템의 구성도.
Fig. 3. Structure diagram of control system.

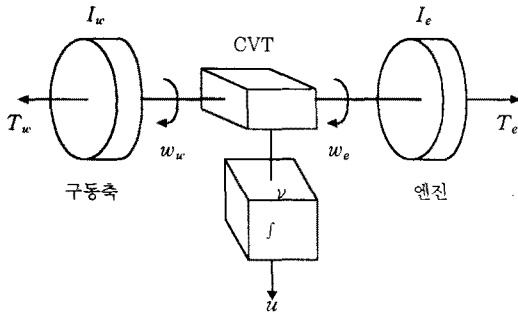


그림 4. 제어 시스템 모형.
Fig. 4. Control system model.

최적의 연료 효율곡선에서 엔진토크 (\$T_e\$)의 특성은 다음과 같이 2차 다항식으로 근사화 할 수 있다.

$$T_e(t) = \Gamma(w_e(t)) = \alpha\omega_w^2(t) + \beta\omega_e(t) + \gamma \quad (2)$$

$$T_w(t) = a\omega_w^2(t) + c + d(t) \quad (3)$$

식 (3)에서 \$a\omega_w^2(t)\$는 견인력, \$c\$는 각종의 저항성분(노면 저항, 오르막저항 등), \$d(t)\$는 경사, 바람 등 외란을 각각 나타낸다. 본 논문에서는 \$d(t)=0\$로 가정한다. \$T_{CVT,e}\$와 \$T_{CVT,w}\$를 각각 무단 변속기의 엔진 토크와 구동축 토크라고 정의하면, 운동방정식은

$$\dot{\omega}_e(t) = I_e^{-1}(T_e(t) - T_{CVT,e}(t)) \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_w(t) = I_w^{-1}(T_{CVT,w}(t) - T_w(t)) \quad (5)$$

와 같이 된다. 여기서, \$I_e, I_w\$는 엔진과 차의 관성을 나타낸다. 그리고 두 회전속도간에는 다음의 관계가 성립된다.

$$\omega_e(t) = \nu(t)\omega_w(t) \quad (6)$$

이때 에너지보존의 법칙에 의해서 전달효율 \$\eta\$를 갖는 식으로 변환된다.

$$\omega_w(t)T_{CVT,w}(t) = \eta\omega_e(t)T_{CVT,e}(t) \quad (7)$$

식 (5)에서 \$T_{CVT,w}(t)\$ 대신에 식 (7)을 사용하여 \$T_{CVT,e}(t)\$로 등가표시하고 식 (4)를 사용하여 \$T_{CVT,e}(t)\$를 \$\dot{\omega}_e\$와 \$T_e\$로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\omega}_w(t) = I_w^{-1}[\eta\nu(t)(T_e(t) - \dot{\omega}_e(t)I_e) - T_w(t)] \quad (8)$$

식 (8)를 식(6)과 식 (3)를 사용하여 정리하고 시간 함수를 나타내는 \$t\$를 없이 표현하면 식 (9)와 같다.

$$I_w \dot{\omega}_w = [\eta\nu(\alpha\nu^2 u_w^2 + \beta\nu\omega_w + \gamma - \nu\omega_w I_e - \nu u_w I_e) - a\omega_w^2 - c] \quad (9)$$

일반적으로 무단 변속기 자체는 단일의 적분기로 표시된다 [5]. 즉

$$\dot{\nu}(t) = u(t) \quad (10)$$

식 (9)로부터 \$\dot{\omega}_w(t)\$를 구하면

$$\dot{\omega}_w(t) = \frac{(\eta\alpha\nu^3 - a)\omega_w^2(t) + \eta\beta\nu^2\omega_w(t) + \eta\nu\nu - c - \frac{\eta\nu\omega_w(t)I_e}{I_w + \eta\nu^2 I_e} u(t)}{I_w + \eta\nu^2 I_e} \quad (11)$$

이 되어 상태변수를 \$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [\omega_w \ \nu]^T\$로 정의하면, 무단 변속기를 포함하는 제어 시스템은 다음의 비선형 상태 미분방정식으로 표현된다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (12)$$

여기서

$$f_1 = \frac{(\eta\alpha x_2^3 - a)x_1^2 + \eta\beta x_2^2 x_1 + \eta\gamma x_2 - c}{I_w + \eta I_e x_2^2}$$

$$g_1 = -\frac{\eta I_e x_1 x_2}{I_w + \eta I_e x_2^2}$$

무단 변속기의 특성에 의해서 제어 시스템의 상태변수는 한계(bound)되어 있다.

$$\begin{aligned} \omega_{w, \min} &\leq x_1 \leq \omega_{w, \max} \\ \nu_{\min} &\leq x_2 \leq \nu_{\max} \\ \omega_{e, \min} &\leq x_1 x_2 \leq \omega_{e, \max} \end{aligned} \quad (13)$$

제어 시스템이 평형점에 있을 때 상태변수의 모임 (\$x \in X | x_1 = \xi(x_2)\$)을 포함하는 곡선은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 평형점에서 \$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0\$ 이므로 식 (11)로부터

$$(a - \eta\alpha\nu^3)\omega_w^2(t) - \eta\beta\nu^2\omega_w(t) - (\eta\gamma\nu - c) = 0 \quad (14)$$

이 된다. 변속비(\$x_2\$)에 대한 구동축(\$x_1\$)의 변화를 함수 \$\xi(x_2)\$로 표현하면 다음과 같다.

$$\xi(x_2) = \frac{\eta\beta x_2^2 + \sqrt{-4ac + 4(a + acx_2^2)\eta x_2 + (\beta^2 - 4a\gamma)\eta^2 x_2^2}}{2(a - \eta\alpha x_2^3)} \quad (15)$$

3. 입력 상태 궤환 선형화

단일 입력의 비선형 시스템은

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x} \in R^n, u \in R \quad (16)$$

식 (16)과 같이 표시되고, 가 제어성을 만족하는 선형모형 (Brunovsky 표준형)은

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (17)$$

$$= A_c \mathbf{z} + b_c v, \quad \mathbf{z} \in R^n, v \in R$$

식 (17)과 같이 변환된다. 비선형 시스템은 입력-상태 궤환을 사용하여 선형화할 수 있다[6]. 입력-상태 궤환 선형화가 가능하기 위한 필요충분조건은 벡터 장(vector field) \$\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})\$가 아래의 조건을 만족하는 것이다.

$$\text{조건 1) } \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \dots, \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}\} = R^n$$

$$\text{조건 2) } \{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \dots, \text{ad}_f^{n-2} \mathbf{g}\}; \text{ Involutive}$$

입력-상태 궤환 선형화가 가능한 비선형 시스템은 변환 후에 새로운 선형 좌표계로 표현 할 수 있다.

$$z(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f z_1 \\ \vdots \\ L_f^{n-1} z_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

이때 선형좌표 $z_1(x)$ 는 아래의 관계를 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} L_{ad_i g} z_1 &= 0, \quad i=0, \dots, n-2 \\ L_{ad_{i-1} g} z_1 &\neq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

이렇게 좌표변환에 의해서 변환된 $z(x)$ 는 미분 기하학[5]에 기초하여 역 변환 $z^{-1}(x)$ 를 가져야 한다. 즉 다음의 행렬이 정칙행렬이어야 한다.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (20)$$

그리고 제어입력 u 는

$$u = \frac{1}{L_x L_f^{n-1} z_1} (-L_f^n z_1 + v) \quad (21)$$

와 같이 선택된다.

지금까지의 이론적인 내용을 제어 시스템에 적용하면,

$$[g, ad_f g] = [g [f, g]] = \begin{bmatrix} g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} g_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

와 같이 된다. 식 (12)가 입력-상태 궤환 선형화 가능하기 위해서는 식 (22)의 행렬이 선형 독립이어야 한다.

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} g_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \quad (23)$$

식 (23)을 계산하면,

$$x_1 = \frac{\beta I_w x_2 + \sqrt{(\beta I_w x_2)^2 + 3 I_e x_2 (\eta \alpha x_2^2 - a)(c I_e x_2 + \gamma I_w)}}{3 I_e x_2 (\eta \alpha x_2^2 - a)} \quad (24)$$

와 같이 되고 이 값에서 제어 불가능 영역에 속하게 된다. 본 연구에서 사용한 변수를 표 1에 나타내었다. 고속 주행 모드를 고려하여 사용한 변수들에 대한 상태변수 특성을 그림 5에 나타내었다.

표 1. 고속주행모드의 모형 변수들.

Table 1. Model parameters of high-speed traveling mode.

ν_{\min}	2.2	I_e	0.125 ($kg \cdot m^2$)
ν_{\max}	6.0	a	0.01 ($kg \cdot m^2$)
$w_{w, \min}$	100	c	35 ($kg \cdot m^2/s^2$)
$w_{w, \max}$	180 (rad/s)	α	-3.13×10^{-4} ($kg \cdot m^2$)
$w_{e, \min}$	200 (rad/s)	β	0.255 ($kg \cdot m^2/s^2$)
$w_{e, \max}$	600 (rad/s)	γ	42.8 ($kg \cdot m^2/s^2$)
I_w	75 ($kg \cdot m^2$)	η	0.8

본 논문에서는 아래와 같은 선형 좌표를 사용한다.

$$z_1 = \lambda(x(t)) = \frac{k}{2\eta I_e} (2 \ln(x_1) + \ln(I_w + \eta I_e x_2^2)) \quad (25)$$

여기서 k 는 임의의 정수이고 선형좌표 z_2 는 아래와 같다.

$$z_2 = L_f \lambda(x) = \nabla \lambda(x) f = k \frac{(\eta \alpha x_2^2 - a)x_1^2 + \eta \beta x_1 x_2^2 + \eta \gamma x_2 - c}{\eta I_e x_1 (I_w + \eta I_e x_2^2)} \quad (26)$$

여기서 $\nabla \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}$ 는 gradient 벡터이다. 선형좌표

$z(x) = [z_1 \ z_2]^T$ 의 역 변환이 존재하기 위해서는 다음의 관계가 성립되어야 한다.

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} \frac{\partial z_2}{\partial x_2} - \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \frac{\partial z_2}{\partial x_1} \neq 0 \quad (27)$$

이때 역 변환이 존재할 수 없는 영역은

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} \frac{\partial z_2}{\partial x_2} - \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \frac{\partial z_2}{\partial x_1} = 0 \quad (28)$$

와 같고 이것은 그림 6의 입력-상태 궤환 선형화 불가능 영역(uncontrollable area)과 일치하게 된다. 즉 제어영역(controllable area)내에서 선형 좌표계 $z(x) = [z_1 \ z_2]^T$ 는 항상 역 변환이 존재하게 된다. 최종적으로 식 (28)의 관계를 만족하도록 u 를 선택하면, 제어 시스템은 다음과 같이 간단한 이중 적분기를 가진 선형모형이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v(t) \end{aligned} \quad (29)$$

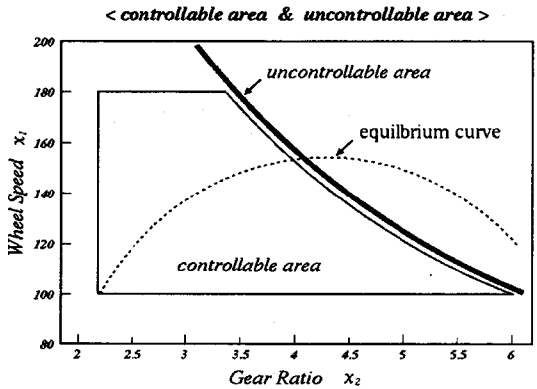


그림 5. 상태변수의 제어영역.
Fig. 5. Control area of state variables.

4. 제어가 설계

비선형 시스템 (16)으로 부터 변환된 선형모형 (17)를 제어하기 위하여 가장 많이 사용된 제어방법은 극-배치 제어이다. 그러나 극-배치 제어기법을 선형모형에 적용할 때에 초기조건에 의해 diffeomorphism의 역 변환으로부터 얻어지는 $(x_1 \ x_2)^T$ 가 과도상태도중 제어 불가능 영역에 도달하는 경우가 발생한다. 이것은 입력-상태 궤환선형화를 할 수 없는 경우이다.

이런 문제점을 해결하기 위한 본 연구에서는 슬라이딩-모드 제어를 이용하여 전 제어구간에서 상태변수를 (동일하게 역 변환에 의한 $(x_1 \ x_2)^T$)가 제어영역에 있도록 하였다. 선형모형 (18)에 대해서 스위칭-초평면은 아래와 같이 정의된다.

$$s = \dot{e}_1 + \epsilon e_1 \quad (30)$$

슬라이딩-모드제어의 입력은

$$v = v_1 + v_{n1} \quad (31)$$

독립적인 선형 제어항 v_1 과 비선형 제어항 v_{n1} 으로 구성된다. 슬라이딩-모드가 얻어진 경우에 스위칭-초평면 s 는 아

래의 관계를 만족하게 된다.

$$s = 0 \quad (32)$$

이때 스위칭-초평면 s 를 미분하면 식(30)이 된다.

$$\dot{s} = \ddot{e}_1 + \varepsilon \dot{e}_1 \quad (33)$$

이 된다. 이 결과에서 선형 제어 항은 $\dot{s}=0$ 을 만족하도록 정의된다. 즉

$$v_1 = \ddot{z}_{1d} - \varepsilon \dot{e}_1 \quad (34)$$

최종적으로 비선형 제어 항은

$$v_{nl} = -k \frac{s}{|s| + \delta} \quad (35)$$

과 같이 정의된다. 이 식에서 $\delta=0.15$ 는 chattering을 방지하기 위한 항이다. k 는 슬라이딩-모드의 존재조건을 만족하도록 $k=10$ 으로 선택하였다. 선형 제어 항 v_1 은 스위칭-초평면까지의 속도를 조정하는 역할을 담당하고 비선형 제어 항 v_{nl} 은 상태변수를 스위칭-초평면에서 이탈하지 않도록 하는 역할을 한다.

슬라이딩-모드 제어기법에 의한 시뮬레이션 결과는 그림 6과 7에 나타내었다.

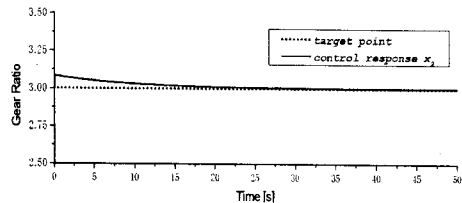
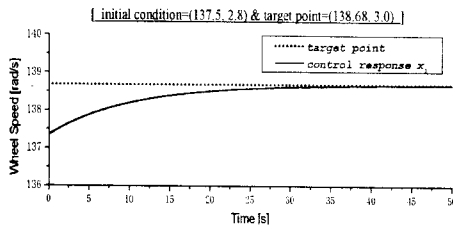


그림 6. 슬라이딩-모드 제어기법에 의한 제어결과-1.

Fig. 6. Control result-1 via sliding-mode control scheme.

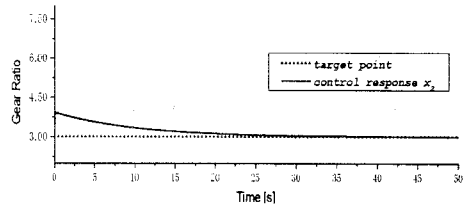
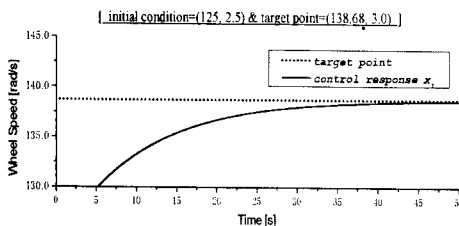


그림 7. 슬라이딩-모드 제어기법에 의한 제어결과-2.

Fig. 7. Control result-2 via sliding-mode control scheme.

5. 결 론

본 연구에서 얻은 결론은 다음과 같다. 첫째로, 무단 변속기를 포함하는 비선형 제어 시스템을 궤환 선형화하여 고속 주행 모드에서 무단 변속기의 출력을 추종 제어하였다. 둘째로, 궤환 선형화하기 위해 비선형 상태 미분방정식의 해를 구할 수 있는 조건을 유도하여 제어 시스템의 상태변수를 제어 가능영역에 있도록 제어기를 설계하였다. 셋째로, 기존의 궤환 선형화에 널리 적용하던 극-배치 제어 기법의 문제점을 분석하여 이를 슬라이딩 제어로 해결하였다. 넷째로, 자동차의 엔진의 출력이 엔진의 속도에 의해 제어가능하다고 가정하고 무단 변속기를 제어하여 연료효율의 특성을 향상시켰다. 그러므로 자동차에 실제로 장착되기 위해서는 엔진과 무단변속기의 통합제어에 관한 연구가 앞으로 필요하다. 또한 무단 변속기에 포함된 불확실성에 관한 병합된 연구가 요구된다.

[참 고 문 헌]

- [1] C. Chan, T. Volz, D. Breitweiser, A. Frank, F. S. Jamzadeh and T. Omitsu, "System design and control considerations of automotive continuously variable transmission", SAE-Paper 840048, 1984.
- [2] H. E. Chana, "Performance of CVT transmission" SAE-Paper 860637, 1986.
- [3] 兩角岳彦, "MF図解特集 CVT(Continuously Variable Transmission)", MotorFan, pp.81-107, 1992.
- [4] 大園耕平, 青木隆, "全電子制御金屬ベルトCVTの開発", HONDA R&D Technical Review, vol.8, pp. 21-33, 1996.
- [5] A. Schmid, "Modelling of a CVT, Measurement and Control Lab-Report", Mot 2-93, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland, 1993.
- [6] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd Springer-Verlag, 1995.