

직교함수에 의한 제어 시스템 설계

안두수
성균관대학교 전기, 전자 및 컴퓨터 공학부

A Design of control system via orthogonal function

Doo-soo Ahn

Dept. of Electrical & Computer Engineering, Sung Kyun Kwan Univ.

Abstract - This paper presents signal analyzer design, realization of system parameter estimation, analysis and system parameter estimation of distributed parameter systems using orthogonal function like Walsh function, block pulse function and Haar function.

1. 서 론

본 논문에서는 월쉬함수(Walsh function)와 블럭펄스함수(block pulse function), 그리고 하알함수(Haar function) 등과 같은 직교함수를 이용하여 신호분석기의 설계, 시스템 파라미터 추정기 구현, 분포정수계에의 해석 및 파라미터 추정등을 다루고 있다. 이러한 직교함수를 이용한 제어 시스템 설계는 직교함수의 적분 연산 행렬을 도입함으로써 미분방정식을 간략화된 대수 방정식의 형태로써 그 해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 시스템 해석에서는 상태방정식으로 표현된 선형시스템을 월쉬함수를 이용하여 그 해를 구하고, 분포정수계에서도 그 이론을 정립하고, 제시된 방법들의 유용성을 몇 가지 예를 통하여 검증하였다.

2. 직교함수 (1)

실수 또는 복소수 값을 갖는 연속(continuous)함수의 집합 $\{\phi_i(t)\}$ ($i=0, 1, 2, \dots$)가 정의구간 $[t_0, t_0+T]$ 에서 다음 식과 같은 직교특성을 가질 때 이를 직교함수집합(orthogonal function set)이라고 한다.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} k, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

여기서 점자 i 와 j 는 양의 정수이고 가중치(weight) k 는 양의 정수 또는 한정된(fixed) 함수이다. 만약 k 가 1이면 정규(normalized)직교라고 하며 그렇지 않은 경우에는 비정규(non-normalized)직교라고 한다.

정의구간 $[t_0, t_0+T]$ 에서 적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 그것의 급수 전개된 근사값 $\hat{f}(t)$ 와 사이의 평균자승오차(mean-square error)를 최소로 할 때에 다음과 같이 급수로 전개될 수 있다.

$$f(t) \approx \hat{f}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \phi_i(t) \quad (2.2)$$

2.1 월쉬함수

Rademacher함수는 식(2.3)과 같이 표현되며 이원배열의 월쉬함수는 Rademacher함수의 연속적인 곱에 의해 (2.4)와 같이 표현된다.

$$Rad(n, t) = sign[\sin(2^n \pi t)] \quad (2.3)$$

이원배열의 월쉬함수와 Rad함수의 관계는 다음과 같다.

$$Pal(n, t) = \prod_{i=0}^{n-1} Rad(i, t)^{b_i} \quad (2.4)$$

여기서, b_i 는 n 을 2진수로 표현할 때의 각 자리수 값이다.

적분연산자 P 는 식(2.5)과 같다.

$$P_{(m, m)} = \begin{bmatrix} P_{\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} & \cdots & -\frac{1}{2m} I_{\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2m} I_{\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} & \cdots & 0_{\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

여기서, $P_{(1, 1)} = \frac{1}{2}$ 이다.

2.2 하알함수

하알함수는 구간 $[0, 1]$ 에서 정의되는 직교함수이다. 또한, 하알함수는 월쉬함수나 블럭펄스함수와는 다르게 진폭이 ± 1 .

$0, \pm \sqrt{2^p}$ 의 값들을 취하며 다음과 같다.

$$Har(2^p + m, t) = \begin{cases} \sqrt{2^p}, & -\frac{m}{2^p} \leq t < \frac{(m+1)/2}{2^p} \\ -\sqrt{2^p}, & \frac{(m+1)/2}{2^p} \leq t < \frac{(m+1)}{2^p} \\ 0, & 그외 구간 \end{cases} \quad (2.6)$$

여기서 $p=0, 1, 2, \dots, \log_2 \frac{m}{2}$, $m=0, 1, 2, \dots, 2^p - 1$ 이다.

하알함수의 적분연산자 P 는 식(2.7)과 같다.

$$P_{(m, m)} = \begin{bmatrix} P_{\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} & -\frac{1}{\sqrt{2}} m^{\frac{3}{2}} Har_{\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} m^{\frac{3}{2}} Har_{\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} & 0_{\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

여기서 $P_{(2, 2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} 0 \end{bmatrix}$ 이다.

2.3 블럭펄스함수

블럭펄스함수는 일반적으로 다음과 같이 단위 구간 $\lambda \in [0, 1]$ 에서 정의된다.

$$Bpf_i(\lambda) = \begin{cases} 1, & \frac{i}{m} \leq \lambda < \frac{i+1}{m} \\ 0, & 그외 구간 \end{cases} \quad (2.8)$$

블럭펄스함수의 적분연산자 P 는 식(2.9)과 같다.

$$P = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

3. 직교함수응용

3.1 신호분석기의 설계 (2)

신호분석기를 그림1의 구성도와 같이 설계하였다. 본 신호분석기는 데이터 입력부인 입력버퍼, 데이터 재배열기, 월쉬함수발생기로부터 데이터를 입력받아서 이를 마이크로프로세서가 월쉬푸리에 변환하여 그 스펙트럼을 직렬포트를 통하여 디스플레이 장치에 출력한다. 또한, 푸리에 월쉬변환하여 얻어진 월쉬계수를 신호합성기로 보내

며 이는 D/A 컨버터로 합성신호가 되어 출력한다. 그림1은 설계한 전체적인 신호분석기의 구성도이다.

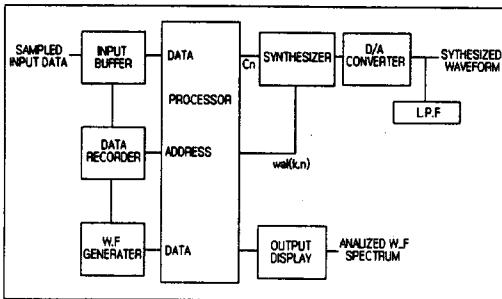


그림1 신호분석기의 구성도

입력버퍼로 들어오는 각각의 입력데이터는 정보를 나타내는 한 개의 정보바이트와 신호의 샘플링값을 나타내는 2개의 신호바이트가 한 조로 구성되며 한 주기의 입력데이터가 마이크로프로세서에서 처리되는 동안 다음 주기의 입력데이터를 래치하기 위하여 입력버퍼를 구성하였다. 입력버퍼에서 정보바이트는 데이터 재배열기로 보내고 신호바이트는 프로세서의 데이터버스로 보낸다. 월쉬함수발생기는 소프트웨어, 하드웨어 두 가지 의존 방법이 있는데, 이 논문에서는 프로세서의 지연시간을 줄이기 위하여 하드웨어로 구성하였다. 그림2는 월쉬 함수 발생기의 구성도이다.

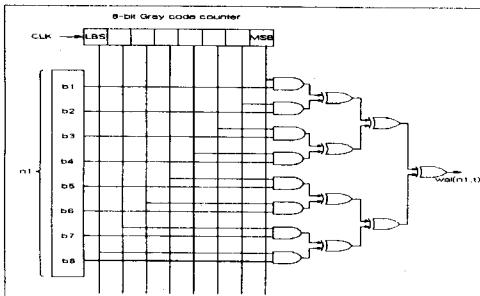


그림2 월쉬함수발생기의 구성도

데이터 재배열기는 신호데이터를 프로세서에서 고속변환하여 월쉬계수를 얻기 위하여 연속배열 월쉬함수의 신호데이터를 자연배열 월쉬함수로 재배열하고 $\log_2 N$ (N:세부 구간수) 횟수만큼 반복처리를 한다.

신호합성기는 마이크로 프로세서에서 처리된 결과의 월쉬계수를 다시 아날로그 신호로 합성하는 역 월쉬변환기의 기능을 하며 처리된 월쉬계수와 월쉬함수를 받아서 별도의 하드웨어를 구성하였고 월쉬함수를 계수와 함께 보수로 취하여 이를 캐리로 가산기를 구성하였으며, 가산된 신호는 신호의 샘플링 크기가 되며, 이를 D/A컨버터를 통하여 출력한다. 이때 D/A컨버터 출력단에 저역통과필터(LPF)를 구성하였다.

다음의 예제를 살펴보기로 하자.

전입이 $5\sin \omega t$ 인 전류가 반파정류기를 통하여 흐를 경우에 그 정상상태의 전압은 다음과 같은 주기신호로 표시된다.

$$E(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t \leq 0 \\ 5 \sin \omega t, & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$E(t + 2\pi) = E(t) \quad (3.1)$$

여기서 주어진 전압 $E(t)$ 를 미지의 신호 $f(t)$ 로하여 이 신호의 푸리에계수를 월쉬계수로 나타내고자 한다. 또한 구하여

진 푸리에계수로 월쉬계수를 찾아내어 신호의 샘플링값을 얻고자 한다.

그림3과 그림4는 각각 입력 신호의 푸리에 파워 스펙트럼과 분석된 월쉬-푸리에 파워 스펙트럼을 나타내었으며 이들이 거의 접근됨을 보여준다.

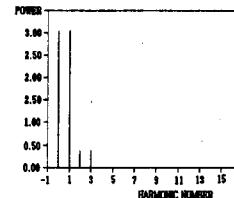


그림3 입력 신호의 푸리에 파워 스펙트럼 ($N=32$)

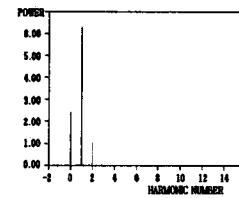


그림4 분석된 월쉬-푸리에 파워 스펙트럼 ($N=32$)

또한, 그림5는 입력신호를 본 연구의 월쉬푸리에변환에 의한 방법으로 얻은 합성신호와 비교하여 나타내었다.

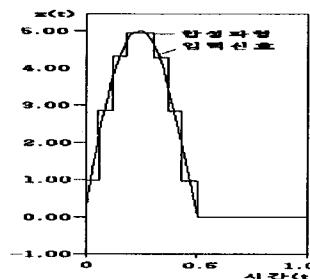


그림5 입력 신호와 파형의 비교 ($N=16$)

3.2 시스템 파라미터 추정기 구현 (3)

고속 유리 Haar변환기는 그림6과 같이 가·감산(AS) 와 게이트부(G), 제어신호 발생부(controller part)로 구성하였다. 그림6의 고속 유리 Haar변환기에는 샘플링된 플랜트의 입력과 출력의 값이 래치(L)를 통하여 입력되고, 고속 유리 Haar변환을 수행하여 그 결과로 유리 Haar계수가 버퍼(B)를 통하여 출력된다.

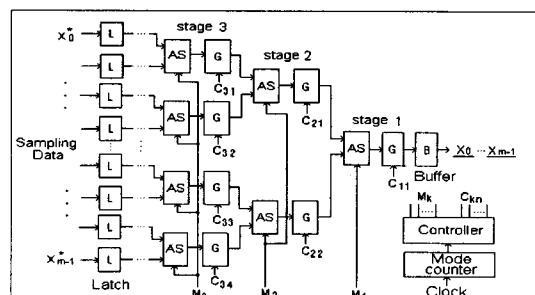


그림6 고속 유리 Haar변환기 블럭도

이상과 같이 설계된 고속 유리 Haar변환기의 구현에 있어서 FPGA(Field Programmable Gate Array)에 의하여 구현할 수 있다. FPGA는 수만 개에 해당하는 게이트의 기능을 한개의 칩 안에 집적화 할 수 있고, 또한 회로구성 과정에서 오류가 발생하였을 경우는 구현과정에 포함 되어있는 시뮬레이션 프로그램에 의하여 효율적으로 극복할 수 있기 때문에 대단히 유용하다.

3.3.2 분포정수계의 파라미터 추정 (5)

다음과 같이 표현되는 분포정수계가 있다.

$$a \frac{\partial x(y, t)}{\partial t} + b \frac{\partial x(y, t)}{\partial y} + cx(y, t) = u(y, t) \quad (3.11)$$

여기서 입력변수 $u(y, t)$ 와 출력변수 $x(y, t)$ 의 정보를 이용하여 미지의 파라미터인 a, b, c 를 결정하는 문제를 보자. 편의상 초기계조건은 0으로 잡주하며, 파라미터는 시불변 상수값으로 가정한다. 먼저 입력과 출력을 각각 기저함수인 직교함수로 다음과 같이 전개하고, 식(3.11)의 양변에 변수 t 와 y 에 대하여 각각 1회씩 적분을 취하여 적분방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a \int_0^y x(y, t) dy + b \int_0^t x(y, t) dt + c \int_0^t \int_0^y x(y, t) dy dt \\ = \int_0^t \int_0^y u(y, t) dy dt \end{aligned} \quad (3.12)$$

적분연산자를 대입하면 대수방정식으로 변환할 수 있다.

$$a\phi^T(y)X_{mn}P_n\phi(y) + b\phi^T(y)P_m^TX_{mn}\phi(y) + c\phi^T(y)$$

$$P_m^TX_{mn}P_n\phi(y) = \phi^T(y)P_m(t)^T U_{mn}P_n\phi(y) \quad (3.13)$$

식(3.13)에서 P_m 과 P_n 은 각각 직교함수를 m 항 및 n 항 전개할 때의 적분연산행렬을 의미한다. 식 양변의 $\phi(t)$ 와 $\phi(y)$ 를 소거하면

$$aX_{mn}P_n + bP_m^TX_{mn} + cP_m^TX_{mn}P_n = P_m^TU_{mn}P_n \quad (3.14)$$

이를 간단히 정리하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A\theta = h \quad (3.15)$$

$$A = \begin{bmatrix} (X_{mn}P_n)_1(P_m^TX_{mn})_1(P_m^TX_{mn}P_n)_1 \\ (X_{mn}P_n)_2(P_m^TX_{mn})_2(P_m^TX_{mn}P_n)_2 \\ \dots \\ (X_{mn}P_n)_n(P_m^TX_{mn})_n(P_m^TX_{mn}P_n)_n \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} (P_m^TU_{mn}P_n)_1 \\ (P_m^TU_{mn}P_n)_2 \\ \dots \\ (P_m^TU_{mn}P_n)_n \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

식(3.15)에서 $(\cdot)_n$ 은 (\cdot) 안의 행렬의 n 번째 열을 의미한다. A 는 $mn \times 3$ 인 행렬이며, h 는 mn 차 열벡터이다. 미지의 파라미터들로 구성된 벡터 θ 는 $A^T A$ 의 역행렬이 존재한다면 다음과 같이 최소자승법에 의해 결정된다.

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T h \quad (3.16)$$

$x(y, t)$ 의 계수 X_{ij} 는 직교함수의 특성에 의해 결정된다.

$$X_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \phi_i(t)x(y, t)\phi_j(y)dydt \quad (3.17)$$

또한 $x(y, t)$ 를 t 와 y 에 대하여 각각 m, n 개씩의 이산값을 이용한다면 다음의 이산공식을 이용할 수 있다.

월쉬함수의 경우는 다음 두 식으로 표현된다.

$$X_{mn}^* = W_m X_{mn} W_n \quad (3.18)$$

$$X_{mn} = \frac{1}{m} W_m X_{mn}^* W_n \frac{1}{n} \quad (3.19)$$

여기서 W_m 은 $m \times m$ 인 월쉬행렬이고, X_{mn} 은 월쉬계수행렬이며 X_{mn}^* 은 이산값이다.

다음 예제를 살펴보기로 하자.

다음의 편미분방정식으로 표현되는 분포정수계에서

$$a \frac{\partial x(y, t)}{\partial t} + b \frac{\partial x(y, t)}{\partial y} + cx(y, t) = u(y, t) \quad (3.20)$$

입력과 출력이 각각

$$u(y, t) = \pi y \cos(\pi t) + (3y + 2) \sin(\pi t) \quad (3.21)$$

$$x(y, t) = y \sin(\pi t) \quad (3.22)$$

으로 주어졌을 때 월쉬함수를 도입하여 미지의 파라미터를 추정하는 문제를 고려한다.

월쉬함수를 y 와 t 에 대해 각각 2항 전개를 이용할 경우

$$W_n = W_m = W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

이고 식(3.21)과 식(3.22)로부터 다음과 같이 된다.

$$X_{mn}^* = X_{22}^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_{00}^* & x_{10}^* \\ x_{01}^* & x_{11}^* \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

여기서,

$$x_{i,j}^* = \frac{x(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}) + x(\frac{i+1}{2}, \frac{j}{2}) + x(\frac{i}{2}, \frac{j+1}{2}) + x(\frac{i+1}{2}, \frac{j+1}{2})}{4}$$

$$u_{i,j}^* = \frac{u(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}) + u(\frac{i+1}{2}, \frac{j}{2}) + u(\frac{i}{2}, \frac{j+1}{2}) + u(\frac{i+1}{2}, \frac{j+1}{2})}{4}$$

$$(i=0, 1, j=0, 1)$$

$$X_{mn} = X_{22} = \frac{1}{4} W_2 X_{22}^* W_2$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{00} & x_{10} \\ x_{01} & x_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$$

그러므로, 월쉬계수행렬인 $X_{mn} = X_{22}$ 을 알 수 있다.

따라서 미지의 파라미터는 앞에서 제안한 방법에 의하여 다음과 같이 결정된다.

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T h = \begin{bmatrix} 0.78534 \\ 1.99950 \\ 3.00128 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

즉, 월쉬함수를 y 와 t 에 대해 각각 2항 전개를 이용하여 추정된 값은 $a = 0.78534$, $b = 1.99950$, $c = 3.00128$ 임을 알 수 있다. 또한 4항 전개를 이용할 때의 결과는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94806 \\ 2.00000 \\ 2.99997 \end{bmatrix}$$

실제값은 $a=1$, $b=2$, $c=3$ 이다. 일반적으로 전개항수를 증가시킴에 따라 실제 파라미터값에 더욱 정확하게 접근한다.

4. 결 론

본 논문에서는 월쉬함수(Walsh function)와 블럭펄스함수(block pulse function), 그리고 하일함수(Haar function) 등과 같은 직교함수를 이용하여 신호분석기의 설계, 시스템 파라미터 추정기 구현, 분포정수계에의 해석 및 파라미터 추정 등을 다루었고 예제를 통해 잘 적용됨을 알 수 있다.

본 연구의 내용을 이용하면 푸리에 함수로 표시되는 시스템의 해석에 이용될 수 있을 것이며 변압기의 돌입전류 검출, 송배전 선로의 거리계산, 유도기기의 과도성분추출, PWM 출력 신호의 고조파 제거, 신호처리에 필요한 신호를 분리 및 합성에 대해 활용될 수 있을 것이고 엔진 실화 검출기 설계나 전력신호 검출기 설계 등에도 이용될 수 있을 것이다.

(참 고 문 헌)

- [1] 안 두수, “월쉬함수와 시스템 제어”, 복斗출판사, 2000.
- [2] 안 두수 외, “월쉬함수에 의한 신호 변환기의 구현”, 대한전기학회논문지, 제43권 12호, pp.2114, 1994.
- [3] 안 두수 외, “유리 하일변환에 의한 시스템 파라미터 추정기의 설계”, 대한전기학회논문지, 제45권 6호, 1996.
- [4] 안 두수 외, “월쉬급수전개에 의한 분포정수계의 해석에 관한 연구”, 대한전기학회논문지, 제35권 3호, pp.9, 1986.
- [5] 안 두수 외, “월쉬함수의 접근에 의한 분포정수계의 파라미터 추정”, 대한전기학회논문지, 제39권 7호, pp.74, 1990.