

δ - 연산자를 이용한 강인한 서보 제어기의 설계

황 현준* · 김 정택**
 포항 1 대학 전기과* · 거제대학 전기과**

A Design on Robust Servo Controller Using δ - Operator

Hwang Hyun-Joon* · Kim Jeong-Tek**
 Dept. of Electricity, Pohang 1 College* · Dept. of Electricity, Koje College**

Abstract - In this paper, we study robust linear optimal model following servo system in the presence of disturbances and parameter perturbations. A technique to directly design the generalized differential operator based unified control system that covers both differential operator based continuous time and delta operator based discrete time case is presented. The quadratic criterion function for a linear system is used to design the robust unified servo control system. This servo control system is designed by applying a simple genetic algorithm to follow the output of the reference model optimally. The characteristics of the proposed servo system are analyzed and simulated to verify the robustness.

$$\begin{aligned} \rho x_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) + E_p d & (1a) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) & (1b) \end{aligned}$$

여기서, $x_p \in R^n$, $u_p \in R$, $y_p \in R$, $d \in R$ 은 각각 제어대상의 상태벡터, 제어입력, 시스템 출력 그리고 미지의 일정 외란이다. R 은 연속시간 시스템에서는 ($t : t \in \text{실수}$)로 되어 실수 영역을, δ -연산자에 의한 이산시간 시스템에서는 ($t : \frac{1}{\Delta} \in \text{정수}$)로 되어 정수영역을 나타낸다. ρ -연산자로 표현되는 $\rho x_p(t)$ 는 연속시간 시스템과 이산시간 δ 시스템에 모두 포괄하는 통합형 기호(*)로서, 연속시간 시스템에서는 $dx_p(t)/dt$ 를, 이산시간 δ 시스템에서는 $(x_p(t) - x_p(t-\Delta))/\Delta$ 를 의미한다. Δ 는 이산시간 δ 시스템에서의 샘플링(sampling) 시간을 나타낸다. 제어대상이 추종해야 할 모델은 식(2)로 표현되는 선형 시스템으로 한다.

1. 서 론

신호처리 분야나 제어이론 분야에서 연속시간 시스템의 이산시간 근사화에 대해서는 수많은 연구와 실제 적용이 있어 왔다. 특히, 디지털 하드웨어의 비약적인 발달로 이산시간 시스템에 대한 관심은 날로 증가해 가고 있으며, 디지털 제어장치도 소형화, 경량화, 저가화, 고신뢰화를 이루어 가고 있다.

$$\begin{aligned} \rho x_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m r(t) & (2a) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) & (2b) \end{aligned}$$

여기서, $x_m \in R^m$, $r \in R$, $y_m \in R$ 은 각각 모델의 상태벡터, 기준 목표입력 그리고 모델의 출력이다. 모델은 가제어, 가관측하고 점근적으로 안정한 것으로 선정한다. 기준입력으로는 계단입력인 $r(t) = r_0 u(t)$ 가 인가되는 것으로 한다. 여기서 r_0 는 임의의 실수이며 $u(t)$ 는 단위 계단입력을 의미한다. (A_m, B_m)는 가안정, (C_m, A_m)는 가점출하고, 식(3)을 만족한다고 가정한다.

본 연구에서는 연속시간 시스템에서 미지의 일정 외란 및 시스템 파라미터 변동 하에서도 강인한 모델 추종 특성을 보이는 설계방법[1]을 근거로 하여, 연속시간 시스템에서의 미분연산자와 이산시간 시스템에서의 δ -연산자[2,3]를 포괄하는 통합형 시스템을 구성하고자 한다. 통합 연산자 ρ 에 의해, 연속시간 시스템 설계와 이산시간 δ 시스템 설계를 함께 표현함으로써 서로의 연계성을 높이고자 한다. 유전 알고리즘을 이용하여 강인한 안정성을 보장하는 해 집단(population)내에서 가중치 함수를 최적화 함으로써 플랜트의 출력이 기준모델의 출력에 추종할 수 있는 가중치를 시행착오법에 의존하지 않고 찾는 설계 방법을 제시하고자 한다. 시스템이 간단할 경우에는 큰 효과가 없으나 시스템이 커지고 가중함수의 상호 의존 값까지도 고려해야 할 경우로 확대되게 되면 이러한 방법을 거치지 않고 최적해를 구한다는 것은 상당히 어려운 작업이 될 것이다. 또한 이산시간 모델화에 의해 나타나는 오차와 공칭 설계 점에서의 변동에 의한 오차는 이에 강인한 모델 추종형 시스템에서 흡수할 수 있음도 보이고자 한다.

$$\det \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

플랜트 출력과 모델 출력의 차이를 오차 e 로 정의하면 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned} e(t) &= y_m(t) - y_p(t) \\ &= C_m x_m(t) - C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (5)$$

플랜트와 모델에 대한 상태방정식과 각 출력간의 오차를 한꺼번에 포괄하는 확대 시스템을 구성하면 식(6)과 같이 된다.

2. 제어시스템의 구성

$$\rho X(t) = AX(t) + Bv(t) \quad (6)$$

제어대상인 플랜트의 응답이 희망하는 과도특성 및 정상 특성에 잘 추종하면서도 파라미터 변동이나 미지의 일정 외란에 대해 강인한 통합형 제어기를 구성하고자 한다. 연속시간과 이산시간 δ 시스템에 관계없이 설계하기 위하여 통합 연산자인 ρ -연산자를 사용하여 전체 시스템을 구성하기로 한다. 주어진 제어대상은 식(1)로 표현되는 연속시간 상태공간 시스템으로 한다.

단,

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ -C_p & C_m & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \rho x_p \\ \rho x_m \\ e \end{bmatrix}, v = \rho u_p$$

이다. 식(6)으로 표현되는 확대 시스템에 대한 가격함수는 식(7)과 같이 정의한다.

$$J = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta} [X^T(t) Q X(t) + v^T(t) R v(t)] dt \quad (7)$$

여기서, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}$, $R=1$ 이다.

식(7)에 사용된 기호 가운데 S는 연속시간 시스템에서는 \int 을, 이산시간 δ 시스템에서는 $\Delta \Sigma$ 를 의미하는 기호이다. 구하고자 하는 제어입력 v 의 최적해를 v^* 로 표시하면, v^* 는 식(8)로 표시된다[2].

$$v^* = L X \quad (8)$$

여기서, $L = -(R + \Delta B^T P B)^{-1} B^T P (I + A \Delta)$ 이다. (9)

통합환경에서 상태 피드백 제어이득, L_a 는 식(10)과 같이 된다.

$$L_{a1} = -R_a^{-1} B_{ab}^T \{ p_{11}(I + A_{ab} \Delta) - p_{13} C_{ab} \Delta \} \quad (10a)$$

$$L_{a2} = -R_a^{-1} B_{ab}^T \{ p_{12}(I + A_{ab} \Delta) + p_{13} C_{ab} \Delta \} \quad (10b)$$

$$L_{a3} = -R_a^{-1} B_{ab}^T p_{13} \quad (10c)$$

δ -연산자의 극한에서 미분 연산자가 얻어지므로 그 경제점에서의 연속성도 보장된다.

구성된 제어시스템에서는 플랜트의 매개변수변동 및 미지의 계단형 외란이 있을 경우에도 플랜트의 출력이 모델의 기준특성에 정상 편차 없이 추종함을 알 수 있다. [4] 이러한 추종성은 샘플링 시간 $\Delta \rightarrow 0$ 으로 되어 연속시간 시스템이 되더라도 그대로 성립한다. 이상에서 얻어진 결과에 따라 그림 1과 같은 제어시스템을 구성할 수 있다.

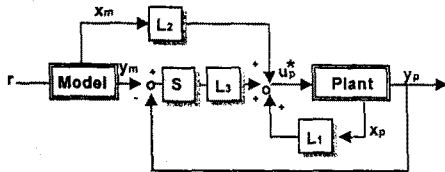


그림 1 강인한 서보 시스템의 구성
Fig. 1 Structure of robust servo system

3. 유전알고리즘을 이용한 가중치 결정

본 절에서는 일반적으로 시행착오법에 의해 선택하는 평가함수의 가중치를 유전 알고리즘을 이용하여 그 최적치를 찾는 설계 방법으로써 접근하고자 한다.

여기서 고려하고 있는 서보 전동기는 2차 시스템이고, 제어입력과 출력에 대한 항만을 평가대상으로 삼고 있다. 두 가지 설정치 가운데 하나를 고정시키면 한 가지 설정치의 변화에 대해서만 유전 알고리즘을 적용시키면 된다. 유전 알고리즘을 사용하여 제어를 설계할 때 하나의 문자열에 부호화 되는 평가함수의 가중치의 수에는 원칙적으로 제한이 없다. 또한 이들을 하나의 문자열에 부호화 함으로써 병렬연산 및 동시최적화가 가능하다는 장점이 있다. 이러한 관점에서 시스템 설계에 대한 조건이 좀 더 확대되어 제어가동행렬의 가중치가 서로 상호 작용하는 경우까지로 확대하더라도 충분히 대처하여 설계해 나갈 수 있는 확장성도 가지고 있다고 이야기 할 수 있다.

여기서 사용하고자 하는 유전 알고리즘의 기본적인 형태는 SGA(simple genetic algorithm) [5]를 사용하고, 평

가함수의 가중치 결정에 어떻게 적용할 수 있는가에 대해서 초점을 둔다. 평가함수의 출력 가중치 가운데 R은 1로 고정시켜 둔 채 출력 가중치인 q에 복제, 교배 그리고 돌연변이의 세 가지 유전 연산자를 사용하여 최적화를 행한다.

4. 전산기 시물레이션

제안된 설계방법을 직류 서보 전동기에 적용하고 연속/이산시간 시스템에서의 통합형 제어기 특성을 살펴보기로 한다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_t}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \end{bmatrix} e_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_m \end{bmatrix} T_L \quad (11)$$

여기서, $R_a=4.2[\Omega]$, $L_a=2.64E-3[H]$, $K_b=0.1852[V-s/rad]$, $K_t=0.1852[N-m/A]$, $J_m=0.39E-5[Kg-m^2]$, $B_m=8.298E-4$ 을 고려한 연속시간 시스템에서의 상태 방정식은 식(12)와 같다.

$$\dot{x}_{cp} = \begin{bmatrix} -1591 & -70.2 \\ 47487 & -213 \end{bmatrix} x_{cp} + \begin{bmatrix} 378.79 \\ 0 \end{bmatrix} e_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 256410 \end{bmatrix} T_L \quad (12)$$

샘플링 시간 $\Delta=0.05$ 초에서의 이산시간 δ 시스템의 상태 방정식은 식(13)으로 표현된다.

$$\delta x_{cp} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} x_{cp} + \begin{bmatrix} 0.4399 \\ 97.963 \end{bmatrix} e_a + E_p T_L \quad (13)$$

제어대상이 추종해야 할 기준 모델은 실제 사용하는 시스템의 특성에 따라 설계자가 설정할 수 있다. 여기서는 $\zeta=0.707$, $\omega_n=1$ 인 2차 시스템을 기준 모델로 하였다.

샘플링 시간 $\Delta=0.05$ 초에서의 이산시간 δ 시스템의 상태 방정식은 식(14)로 표현된다.

$$\delta x_{dm} = \begin{bmatrix} -0.0244 & 0.9651 \\ -0.9651 & -1.3890 \end{bmatrix} x_{dm} + \begin{bmatrix} 0.0244 \\ 0.9651 \end{bmatrix} e_a \quad (14)$$

제어대상인 직류 서보 전동기의 속도응답이 기준 모델의 출력응답에 정상편차 없이 최적으로 추종하도록 평가함수는 식(15)와 같이 설정한다.

$$J = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta} [e^T q e + v^T R v] dt \quad (15)$$

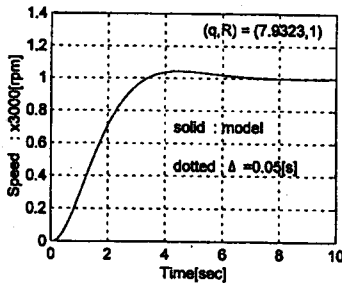
이제 평가함수의 가중치 q와 R의 선정에 따른 최적화를 기하기 위하여 SGA 방법을 적용하기로 한다. 적합도를 판정하기 위한 기준으로는 IAE(integral of the absolute magnitude of the error) 평가기준을 사용하기로 한다. 식(15)에서 평가함수의 출력 가중치 가운데 R은 1로 고정시켜 둔 채 출력 가중치인 q에 대하여 복제, 교배 그리고 돌연변이의 세 가지 유전 연산자를 사용하여 최적화를 행한다. 교배 확률은 0.7로 하였으며, 돌연변이 확률은 0.03으로 정하여 적용하였다. 출력 가중치인 q의 탐색 범위는 1과 21 사이의 값에서 시물레이션을 하였다. 임의로 넓은 범위를 주고 진행시킬 수도 있으나 어느 정도 기본 범위를 가지고 출발하는 것이 빠른 수렴을 가지고 온다. 세대수는 최대 50세대로 한정하여 실행하였다.

샘플링시간 $\Delta=0.05$ 초, 가중 $(q, R)=(7.9323, 1)$ 인 경우의 이산시간 δ 시스템에서의 상태 피드백 제어이득, L은 표 1과 같다.

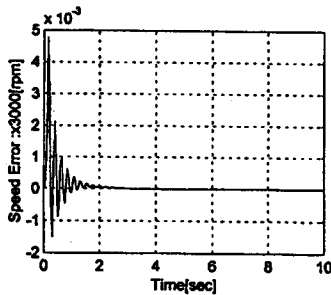
표 1 최적이득 L (R=1)
Table 1 Optimal gain L (R=1)

q	Δ	L_1	L_2	L_3
7.9323	50 [msec]	0.0000 -0.1004	0.3031 0.0186	2.0079

기준입력으로 정격회전수 3000(rpm)의 계단형 입력을 사용하였다. 부하특성을 검토하기 위하여 SGA에서 구한 최적 가중(q, R)=(7.9323, 1)에서 연속시간 시스템과 샘플링 시간 $\Delta=0.05$ 초의 이산시간 δ 시스템에 대한 응답 특성을 그림 2에 나타내었다. 전체적으로 좋은 모델 추종성을 보이고 있음을 확인할 수 있다.



(a) speed response



(b) speed error response

그림 2 직류 서보 전동기의 속도와 속도오차 응답
Fig. 2 Speed and speed error responses for DC motor

5. 결 론

본 연구에서는 미지의 일정 외란 및 시스템 파라미터 변동 하에서도 강인한 모델 추종 특성을 보이는 제어기를, 연속시간 시스템에서의 미분 연산자와 이산시간 시스템에서의 δ -연산자를 포괄하는 통합형 시스템으로 구성하였다. 이산시간 모델화에 의해 나타나는 오차와 공칭 설계점에서 변동에 의한 오차는 이에 강인한 모델 추종형 시스템에서 흡수할 수 있음도 확인할 수 있었다. 통합 연산자 ρ 에 의해, 연속시간 시스템 설계와 이산시간 δ 시스템 설계를 함께 표현함으로써 서로의 연계성을 높였으며, 통합환경 하에서 파라미터 변동에 강인함을 수식적으로 증명하였다. SGA 유전 알고리즘 기법을 이용하여 강인한 안정성을 보장하는 해 집단(population)내에서 가중치 함수를 최적화함으로써 플랜트의 출력이 기준모델의 출력에 추종할 수

있는 가중치를 시행착오법에 의존하지 않고 찾는 설계법을 제시하였다.

(참 고 문 헌)

- [1] C. S. Hwang, C. T. Kim, M. S. Kim, "A Design on Robust Multivariable Model Following Servo system", Proceedings of the Asian Control Conference, vol.3, pp.191-194, 1994.
- [2] R. H. Middleton and G. C. Goodwin, Digital Control and Estimation: A Unified Approach, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
- [3] C. B. Soh, "Robust discrete time system using delta operator", International Journal of Control, vol.54, no.2, pp.453-464, 1991.
- [4] 김정택, 이화석, 박성준, 추영배, 황천준, 이양우, 박준호, " δ -연산자를 이용한 강인한 모델 추종형 서보 시스템의 구성에 관한 연구", 대한 전기학회 논문지, 48A권, 6호, pp.747-751, 1999.
- [5] D. E. Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Addison - Wesley, Publishing Company, 1989.