

고속윌쉬변환을 이용한 신호분석기 설계에 관한 연구

한상욱*, 신승권*, 박준호*, 오민환**, 한상인***, 안두수*

: 성균관대학교, * : 충주산업대, ** : 한국수자원공사, *** : 한국전력기술

A Study on Signal Analyser Design using Fast Walsh Transform

Sang-wook Han*, Seung-kwon Shin*, Du-su Ahn*, *, Min-whan Oh**, Sang-in Han***

* : Sung Kyun Kwan Univ., * : Chungju National Univ.

** : Korea Water Resources Corporation, *** : Korea Power Engineering Company

Abstract -This paper presents the Walsh-Fourier conversion algorithm and Signal Analysis Technique. The Fourier coefficients are determined as the combinations of the Walsh coefficients in terms of the new Walsh-Fourier conversion algorithm. This paper checks the analysis of the Walsh-Fourier spectra and the approximate synthesis of the waveform via one example.

1. 서 론

윌쉬함수는 정현과 함수와 유사하게 정현성분과 역현성분에 근접하게 분리되는 직교특성을 갖고 있으며, 연산에서 곱셈이 필요없고 가감산만으로 처리가 가능하기 때문에 고속변환에 실시간 데이터 처리가 고속푸리에 변환(Fast Fourier Transform: FFT)보다 빠른 고속윌쉬변환(Fast Walsh Transform: FWT)을 많이 응용하고 있다[1,4,5,7].

고속윌쉬변환 알고리즘은 cooley-tukey형태의 신호흐름선도를 기초로 하여 개발되었고 연속배열의 고속윌쉬변환 접근은 자연배열의 윌쉬함수 계수를 계산한 후 연속배열과 자연배열의 관계를 이용하여 연속배열의 윌쉬함수 계수를 순차적으로 구할 수 있다. 그러나 이 방법은 자리바꿈(bit-reversal)뿐만 아니라 그레이 코드를 이진코드로 변환하는 과정이 포함되기 때문에 효과적인 알고리즘이 되지 못한다[10]. 따라서 본 논문에서는 Brown[14]에 의해 유도된 연속배열 윌쉬함수의 고속윌쉬변환 알고리즘을 이용하여 입력신호를 분석하는 고속윌쉬 푸리에변환과 분석된 신호를 합성하기 위한 고속푸리에 윌쉬변환 알고리즘을 제시하였다. 즉 신호의 푸리에계수를 윌쉬함수로 변환하여 처리하며 처리된 신호는 고속푸리에 윌쉬변환 알고리즘의 신호합성 기법을 통하여 합성하여 출력하였다.

2. 본 론

2.1 윌쉬함수와 윌쉬변환

윌쉬함수는 정규화 된 시구간 $[0, T)$ 에서 두 가지의 크기 값, 즉 +1과 -1로 배열된 직교 집합을 형성하며 식(1)과 같이 표현된다.

$$Wal(n, t) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

여기서, N 은 전개항수, n 은 윌쉬함수의 차수, t 는 시간이다.

윌쉬함수는 우함수인 Cal 함수와 기함수인 Sal 함수로 다음과 같이 분리 할 수 있다.

$$Wal(2k, t) = Cal(k, t) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$Wal(2k-1, t) = Sal(k, t) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (2)$$

또한 윌쉬함수 유한급수전개를 이용하여 적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} F_n Wal(n, t) \quad (3)$$

여기서, F_n 은 n 번째 윌쉬함수계수를 나타낸다.

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) Wal(n, t) dt \quad (4)$$

식(4)를 윌쉬변환이라하며 이에 대응되는 식(3)를 윌쉬역변환이라 한다.

N 개의 윌쉬함수로 표현되는 함수 $f(t)$ 는 윌쉬함수가 구분연속인 함수 값으로 구성되어 있기 때문에 부분적으로 연속인 형태로 표현된다. 이때 i 번째 세부구간에서의 $f(t)$ 의 값을 f_i^* 라고 하면 식(3)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f_i^* = \sum_{n=0}^{N-1} F_n Wal(n, i) \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

또한 식(5)의 윌쉬함수계수 F_n 은 다음과 같다.

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i^* Wal(n, i) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

여기서, $Wal(n, i)$ 는 n 번째 윌쉬함수에 대한 i 번째 세부구간에서의 값을 나타낸다.

식(6)을 이산윌쉬역변환이라 하고, 식(5)를 이산윌쉬변환이라 한다.

2.2 고속윌쉬변환

고속윌쉬변환 알고리즘은 cooley-tukey형태의 신호흐름선도를 기초로 하여 개발되었고 연속배열의 고속윌쉬변환 접근은 자연배열의 윌쉬함수계수를 계산한 후 연속배열과 자연배열의 관계를 이용하여 연속배열의 윌쉬함수 계수를 순차적으로 구할 수 있다. 그러나 이 방법은 자리바꿈(bit-reversal)뿐만 아니라 그레이 코드를 이진코드로 변환하는 과정이 포함되기 때문에 효과적인 알고리즘이 되지 못한다[10]. Brown[14]에 의해 유도된 연속배열 윌쉬함수의 고속윌쉬변환 알고리즘은 다음과 같다.

$$F_0(i, 0) = f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

$$F_{r+1}(k, j) = F_r(2k-1, [\frac{j}{2}]) + (-1)^{[\frac{i+j-1}{2}]} F_r(2k, [\frac{j}{2}]) \quad (8)$$

$$F_j = F_p(r, j) \quad (9)$$

단 $r = 0, 1, 2, \dots, p-1$ $p = \log_2 N$
 $j = 0, 1, 2, \dots, 2^{r+1} - 1$

$$k=1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2^{r+1}}$$

여기서, $\{\cdot\}$ 는 소수점 이하를 절삭한 정수를 나타낸다.

2.3 월쉬푸리에 상호변환

2.3.1 월쉬푸리에변환

주기 T 를 갖는 적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 를 푸리에 급수를 이용한 표현하면 다음과 같이 여현-정현함수의 합으로 표현되어 진다.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{2\pi n t}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi n t}{T})] \quad (10)$$

여기서 푸리에계수는 다음과 같다.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\frac{2\pi n t}{T}) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\frac{2\pi n t}{T}) dt \quad (11)$$

푸리에계수를 월쉬함수계수로 변환하여 나타내기 위하여 임의의 함수 $f(t)$ 의 이산 값을 이산푸리에급수로 표현하면 다음과 같다.

$$f(\theta_k) = a_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} [a_n \cos n\theta_k + b_n \sin n\theta_k] + b_{\frac{N}{2}} \sin \frac{N}{2} \theta_k \quad (12)$$

여기서, $\theta_k = (\frac{2\pi k}{N})$ $k=0, 1, 2, \dots, N-1$

여기서 이산푸리에계수는 다음과 같다.

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\theta_k)$$

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\theta_k) \cos n\theta_k \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\theta_k) \sin n\theta_k \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (13)$$

식(13)의 $f(\theta_k)$ 를 월쉬함수로 표현하기 위하여 월쉬-푸리에계수를 정의하면 다음과 같다.

$$Ta_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(p, k)$$

$$Ta_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(p, k) \cdot \cos n\theta_k, \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$Tb_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(p, k) \cdot \sin n\theta_k, \quad n=1; 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (14)$$

월쉬함수 연산특성을 이용하여 월쉬함수를 Cal 성분과 Sal 성분으로 다음과 같이 분리하여 표시할 수 있다.

$$Ta_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Cal(p, k)$$

$$Ta_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Cal(p, k) \cdot \cos n\theta_k, \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$Tb_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Sal(p, k) \cdot \sin n\theta_k, \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (15)$$

월쉬-푸리에계수를 고려하여 이산푸리에계수를 월쉬계수로

표시하면 다음과 같다.

$$a_0 = \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} Ta_0 Fc_p$$

$$a_n = 2 \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} Ta_n Fc_p, \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$b_n = 2 \sum_{p=0}^{\frac{N}{2}-1} Tb_n Fs_p, \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (16)$$

월쉬-푸리에 변환된 식(16)을 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$A = Ta \cdot Fc, \quad B = Tb \cdot Fs$$

$$Ta = [1 C(0) \ 2 C(1) \ 2 C(2) \ \dots \ 2 C(\frac{N}{2}-1)]^T$$

$$Tb = [2 S(1) \ 2 S(2) \ 2 S(3) \ \dots \ 2 S(\frac{N}{2})]^T \quad (17)$$

2.3.2 푸리에월쉬변환

이산푸리에급수로 전개된 임의의 함수 식의 양변에 월쉬함수를 곱하고 N 으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(p, k) \cdot f(\theta_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_0 Wal(p, k)$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} a_n Wal(p, k) \cos n\theta_k \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} b_n Wal(p, k) \sin n\theta_k \right]$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b_{\frac{N}{2}} Wal(p, k) \sin \frac{N}{2} \theta_k$$

$$p=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (18)$$

여현-정현함수의 푸리에-월쉬계수를 정의하면 다음과 같다.

$$Tc_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(p, k) \cdot \cos n\theta_k, \quad n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$Ts_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Wal(p, k) \cdot \sin n\theta_k, \quad n=1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (19)$$

월쉬함수 연산특성을 이용하여 월쉬함수를 Cal 성분과 Sal 성분으로 분리하여 표시할 수 있다.

$$Ts_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Sal(p, k) \cdot \sin n\theta_k, \quad p, n=1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$Tc_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Cal(p, k) \cdot \cos n\theta_k,$$

$$p, n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (20)$$

식(18)의 좌변은 월쉬계수와 같은 형태이므로 식(20)을 대입하여 표시하면 다음과 같다.

$$F_n = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a_n \cdot Tc_n + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b_n \cdot Ts_n$$

$$Fc_n = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} Tc_n \cdot a_n, \quad Fs_n = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} Ts_n \cdot b_n \quad (21)$$

푸리에-월쉬변환된 식(21)을 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$F_c = T_c \cdot A \quad F_s = T_s \cdot B$$

$$T_c = \left[C(0) \ C(1) \ C(2) \ \dots \ C\left(\frac{N}{2} - 1\right) \right]$$

$$T_s = \left[S(1) \ S(2) \ S(3) \ \dots \ S\left(\frac{N}{2}\right) \right] \quad (22)$$

2.4 시물레이션

식(23)으로 표시되는 비주기 신호를 구간 [0,1)에서 시물레이션하고자 한다.

$$f(t) = e^{-2t} \quad , \quad 0 < t < 1 \quad (23)$$

여기서 주어진 신호 $f(t)$ 를 월쉬-푸리에 변환하여 푸리에 급수 전개하고 또한 구하여진 푸리에 계수로 푸리에-월쉬 변환하여 신호의 샘플링 값을 얻고자 한다.

그림1은 원함수의 파형과 원함수를 월쉬-푸리에 유한급수로 전개한 파형을 비교하여 서로 접근하는 것을 보였다.

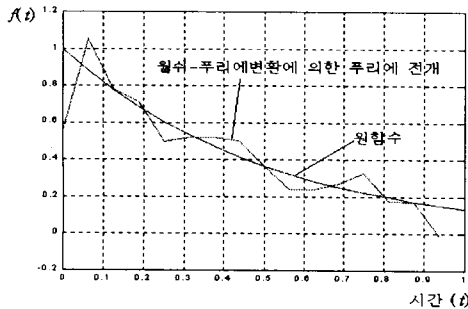


그림1 푸리에전개함수의 비교(N=16)

그림2는 입력신호를 월쉬-푸리에 변환에 의한 방법으로 얻은 합성신호와 비교하여 나타내었으며 비교 결과 원함수에 접근하는 것을 나타내고 있다.

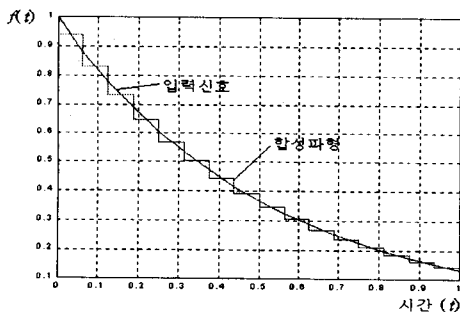


그림2 입력신호와 합성파형의 비교(N=16)

3. 결 론

신호처리 분야에서 푸리에함수는 기저함수가 복소지수 (complex exponential)의 형태이므로 연산속도가 저하되며 연속적인 신호를 실시간 고속처리 하는 데 문제점이 있다. 이를 해결하기 위하여 본 논문은 기저함수가 +1과 -1의 2진 디지털 성분의 값을 가지고 2개의 월쉬함수를 곱해도 다른 하나의 월쉬함수 형태로 표현되며 복소수 계산이 필요 없으므로 연산량이 적어짐으로 인해 고속 계산이 가능해지는 월쉬함

수를 이용하여 정현 및 여현함수 형태의 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하여 고속처리 하였으며 입력신호를 분석하는 고속월쉬 푸리에 변환과 분석된 신호를 합성하기 위한 고속푸리에 월쉬 변환 알고리즘을 제시하였다. 즉 신호의 푸리에급수를 월쉬함수로 변환하여 처리하며 처리된 신호는 고속푸리에 월쉬 변환 알고리즘의 신호합성 기법을 통하여 합성하여 출력하였다.

본 연구의 내용을 이용하면 푸리에 함수로 표시되는 시스템의 해석에 이용될 수 있을 것이며 변압기의 돌입전류 검출, 송배전 선로의 거리계산, 유도기기의 과도 성분 추출, PWM 출력 신호의 고조파 제거, 신호처리에 필요한 신호를 분리 및 합성에 대해 활용될 수 있을 것이다.

(참 고 문 헌)

- [1] K. G. Beauchamp, "Application of Walsh and related functions", London, New York: Academic Press, 1975.
- [2] C. F. Chen & C. H. Hsiao, "A State-space Approach to Walsh Series Solution of Linear Systems", Int. J. Systems Sci., vol. 6, no. 9, pp.833-858, 1975.
- [3] K. M. Wong & Y. G. Jan, "Adaptive Walsh equaliser for data transmission", Proc.IEE, vol.130, no.2, pp.153-160, 1983.
- [4] F. H. Henning, "Applications of Walsh function in communications", IEEE., pp.82- 91, 1969.
- [5] K. R. Rao, "Orthogonal transforms for digital signal processing", New York: Springer-Verlag, 1975.
- [6] Stavouladis. P. & S. Tzafestas, "Walsh series approach to observer and filter design in optimal control system.", Int. J. Control vol.26, pp.721-736, 1977.
- [7] K. G. Beauchamp, "Walsh functions and their applications", London, New York: Academic Press, 1975.
- [8] N. M. Blachman, "Sinusoids versus Walsh Functions", Proceeding of The IEEE, vol.62, pp. 346-354, 1974.
- [9] Reuven Kitai, "Synthesis of Periodic Sinusoids from Walsh Waves", IEEE Trans. on I.A.M., vol.IM-24, pp. 313-317, 1975.
- [10] 안 두수, "월쉬함수와 시스템 제어", 북두출판사, 2000.
- [11] K. Muniappan & R. Kitai, "Microprocessor-based Walsh-Fourier spectral analyzer", IEEE Trans.IM, vol.28, pp.295-299, 1979.
- [12] B. K. Durgun, "A microprocessor implemented Fast Walsh Transform," IEEE. Trans. Pic.Appl. Micro Computer, pp.395-399, 1980.
- [13] Rudi de Buda, "Frequency Synthesis Using Walsh Functions", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, vol. EMC-21, no.3, pp.269-274, 1979
- [14] W. S. Kuklinski, "Fast Walsh Transform Data-Compression Algorithm", The International Federation for Medical Electronics and Biological Engineering , pp. 465-472, 1983.
- [15] J. A. Asumadu & R. G. Hoft, "Microprocessor Based Sinusoidal Waveform Synthesis Using Walsh and Related Orthogonal Functions," IEEE Trans. on P.E., vol.4, pp. 234-241, 1989.