

개선된 고속월쉬변환에 의한 직교필터 설계

정제욱\* · 조영호\* · 이한석\*\* · 박준훈\*\*\* · 심재선\*\*\*\* · 안두수\*\*\*\*\*  
 \* 광명제어 \*\* 부천대학 \*\*\*충주대학교 \*\*\*\*삼척대학교 \*\*\*\*\*성균관대학교

The orthogonal filter design using improved fast Walsh transform

Jewook, Chung · Youngho, Cho · Hanseok, Lee · Junhoon, Park · Jeasun, shim · Doosoo, Ahn  
 Kwangmyoung, Bucheon college, chungju national university, Samchok national university.

**Abstract** - The standard approach consists of using correlation of orthogonal functions in digital filtering, such as well-known FFT(Fast Fourier Transform) and FWT(Fast Walsh Transform). But it needs much calculations, multiplications and additions. The calculation amount is  $m \cdot \log_2 m$  in the general case. Therefore, this requires high speed processors to calculate in real time, which can calculate floating point.

This study developed improved fast Walsh transform based on dyadic-ordered fast Walsh transform, then regenerated signal flow graph of improved fast Walsh transform, and used it for digital filtering, and then measured fundamental frequency and harmonics for current and voltage signals of power system.

1. 서 론

변전소와 송전선로에 대한 모든 시스템들은 디지털 컴퓨터에 의하여 전력신호를 검출함으로써 보호가 가능하다는 기본적인 개념이 Rockefeller에 의해 소개되면서 전력상에서 다양한 형태로 신호를 검출하는 방법들이 많이 연구되어져 왔다. Mann과 Morrison은 샘플링한 데이터로부터 전압과 전류의 페이저(phasor)들을 측정하는 간단한 방법을 연구하였으며, Hope, Malik는 푸리에 변환을 이용한 디지털 필터링으로부터 전압과 전류의 기본 주파수(60Hz) 성분을 측정하는 알고리즘을 소개하였다 [1-2]. 그러나 이 알고리즘은 복소수와 곱셈 연산이 있어 고조파부분을 요하는 곳이나 많은 양의 계측을 동시에 요구되는 곳에는 실시간 연산이 불가능하게 되는 문제를 갖고 있다[3-4].

본 연구에서는 전력계통에서의 신호인 전류·전압의 기본파와 각 고조파성분을 빠른 시간 안에 검출하기 위하여  $\pm 1$ 의 값만을 가짐으로써 곱셈의 연산이 필요 없는 장점 때문에 연산량에 큰 장점을 가진 월쉬함수를 이용하였다[5-7]. 또한 연산량을 더욱 개선하기 위하여 기존의 고속월쉬변환에서는  $N \log_2 N$ 의 연산량이 요구되던 것을  $2(N-1)$ 회의 가감산 연산만으로 수행할 수 있도록 개선된 고속월쉬변환 알고리즘을 개발하였다. 이 개선된 고속월쉬변환 알고리즘은 펄리배열 고속월쉬변환을 샘플링된 입력 데이터가 입력 시간의 순서로 배열되게 변형함으로써 유도하였다. 또한 하나의 주파수만을 계측하는 경우도 첫 번째 나비선도에서는 1번만의 가감산이 행하여지고 그 외의 구간의 나비선도에서는 2번의 가감산만이 필요하게 되어  $2(\log_2 N - 1) + 1$ 번의 가감산 연산만이 필요하게 되어 Hope가 제시한 알고리즘보다 연산량을 크게 감소시켰다.

2. 월쉬함수에 의한 직교필터 설계

월쉬함수 각각의 차수(order)는 각 조파수의 기준파를

나타내고 있음을 알 수 있다. 따라서 월쉬함수의 각 차수를 계측하고자 하는 고조파 성분의 기준파로 사용하여 이 기준파와 입력신호와의 상관관계(correlation)에 의해 각 고조파 성분의 실수성분과 허수성분을 추출하고 또한 실수성분과 허수성분의 파워 스펙트럼(power spectrum)을 구하면 입력 신호에 포함되어 있는 각 고조파 성분의 크기를 구할 수가 있다. 입력 신호를  $x(t)$ 라하고 이 신호를 월쉬함수로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x(t) = a_0 \text{Wal}(0, t) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n \text{Wal}(n, t) \tag{2.1}$$

여기서  $a_0, a_n$ 은 식(2.2)와 같다.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \text{Wal}(0, t) dt \tag{2.2}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \text{Wal}(n, t) dt$$

식(2.1)과 식(2.2)를 푸리에 함수와 비교하기 위하여 월쉬함수 중의 CAL, SAL 함수로 표현하면

$$x(t) = a_0 \text{Wal}(0, t) + \sum_{i=1}^{N/2} \sum_{j=1}^{N/2-1} (a_i \text{SAL}(i, t) + b_j \text{CAL}(j, t))$$

이고, 여기서  $a_i, b_j$ 은 식(2.4)와 같다.

$$a_i = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \text{SAL}(i, t) dt \tag{2.4}$$

$$b_j = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \text{CAL}(j, t) dt$$

여기서  $i, j=1, 2, \dots, N-1$

여기서  $a_i, b_j$ 는 월쉬함수의 직교성 때문에 각 고조파 성분의 실수 성분과 허수 성분을 나타내게 된다. 기준이 되는 CAL, SAL 기본파의 저장된 샘플치와 입력신호의 한 주기의 샘플 데이터를 상관관계를 취하면 원하는 주파수 성분의 신호의 실수성분과 허수성분을 추출할 수 있다.

입력신호를 기준파, 주기당 N번 샘플링하고 관측창(observation window)을 1주기로 할 때 CAL, SAL 기준파와 이산화된 신호  $\{x(n)\}$ 의 상호 상관관계(cross-correlation)은 다음과 같이 표시된다.

$$y_n(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(k-n) \text{CAL}(j, k-n) \tag{2.5}$$

$$y_j(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(k-n) \text{SAL}(j, k-n) \tag{2.6}$$

여기서,  $k=0, 1, \dots, N-1, j=1, 2, \dots, N/2$

식(2.5)와 식(2.6)을 이용하여 월쉬함수를 16항 전개하고 샘플을 주기당 16번하였을 경우 각 고조파 성분들에 대한 특성을 보면, 기본파는 다음 식에 의해 검출된다.

$$y_{r1}(k) = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{15} x(k-n) \text{CAL}(1, k-n) \tag{2.7}$$

$$y_{i1}(k) = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{15} x(k-n) \text{SAL}(1, k-n) \tag{2.8}$$

여기서,  $k=0, 1, \dots, 15$

주파수 응답 특성은 그림 1, 그림 2와 같다.

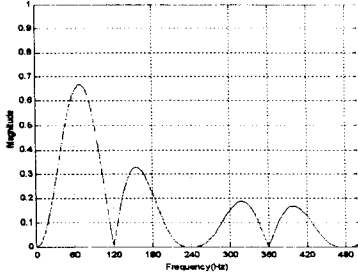


그림 1 기본과 실수부의 주파수 응답 (N = 16)  
Fig. 1 Frequency response of real part for fundamental frequency(N=16)

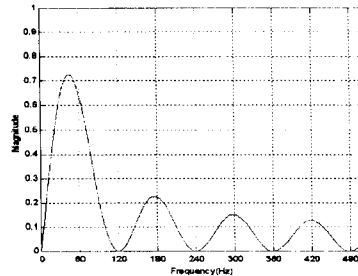


그림 2 기본과 허수부의 주파수 응답 (N = 16)  
Fig. 2 Frequency response of imaginary part for fundamental frequency(N=16)

### 3. 개선된 고속월쉬변환 알고리즘 유도

본 절에서는 새롭게 개선된 고속월쉬 변환 알고리즘을 유도하고자 한다. 기존의 고속월쉬변환을 적용한다면 주기당  $m$  샘플을 하였을 경우  $m \cdot \log_2 m$ 번의 가감산 연산을 수행하여야 한다. 그러나 본 연구에서는 주기당  $m$  샘플을 하였을 경우 이를  $2(m-1)$ 번의 가감산 연산만을 수행할 수 있도록 연산량을 크게 감소시킬 수 있는 개선된 고속월쉬변환을 유도하였으며, 이 개선된 고속월쉬 변환 알고리즘을 수행함으로써 연산속도를 개선하여 마이크로프로세서를 이용한 제품의 개발시 프로세서의 부담을 줄일 수 있도록 하였다.

연산속도를 개선하기 위해서는 입력 신호가 시간의 흐름으로 배열되어야 하며, 또한 신호흐름도가 일반적인 나비선도의 모양을 갖추어야 한다. 따라서 신호흐름도가 일반적인 나비선도 모양을 갖춘 팰리배열이 가장 적합함으로 기본적인 고속변환은 팰리배열에 의하여 행하여진다. 그러나 팰리배열은 주파수 성분을 추출하기에 그 배열이 적당하지 않다. 그러므로 주파수성분을 추출하기 위해서는 월쉬 배열이 적당함으로 팰리배열에 의해 얻어진 값을 다시 월쉬 배열로 재배열하게 하였다. 팰리배열, 월쉬배열 그리고 CAL·SAL배열 사이에는 표1과 같은 상호변환관계가 있다. 팰리배열을 적용하여 연산량을 개선하기 위해서는 그림 3에 나타난 신호흐름을 그대로 적용할 수가 없다. 왜냐하면 비트 반전(bit-reverse)에 의하여 신호흐름도의 입력신호가 시간의 흐름에 맞추어 배열되지 않기 때문이다. 따라서 그림 3의 신호흐름을 그림 4에 나타난 것과 같이 변경하였다.

즉, 비트 반전(bit-reverse)를 처음에 수행하는 것이 아니라 변환을 수행한 후 최종단에서 수행을 한다. 이와 같이 하였을 때 팰리 계수의 배열은 그림 4와 같이 나타나게 된다. 비트 반전을 처음에 수행하면 이 비트

표 1 팰리, CAL·SAL 그리고 월쉬의 상호변환 관계 (N=16)  
Table 1 Conversion for Paley linear progression (N=16)

Paley 배열	CAL, SAL 배열	Walsh 배열
Pal(0,t)	CAL(0,t)	Wal(0,t)
Pal(1,t)	SAL(1,t)	Wal(1,t)
Pal(3,t)	CAL(1,t)	Wal(2,t)
Pal(2,t)	SAL(2,t)	Wal(3,t)
Pal(6,t)	CAL(2,t)	Wal(4,t)
Pal(7,t)	SAL(3,t)	Wal(5,t)
Pal(5,t)	CAL(3,t)	Wal(6,t)
Pal(4,t)	SAL(4,t)	Wal(7,t)

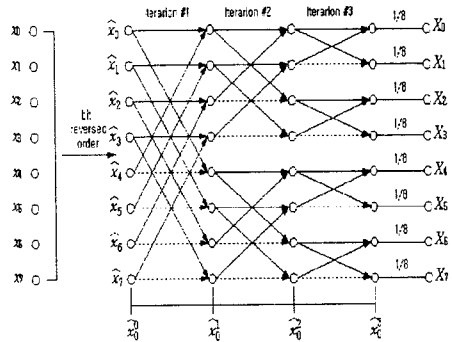


그림 3 팰리배열 고속월쉬변환 신호 흐름도  
Fig. 3 FWT signal flow graph of Paley order

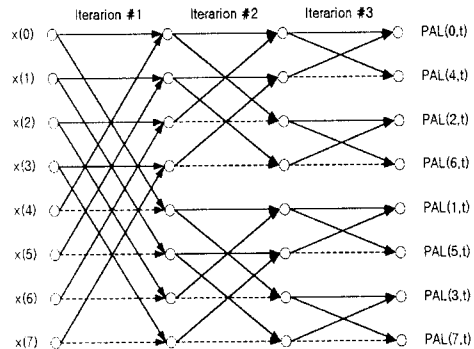


그림 4 팰리배열의 새로운 고속변환 신호흐름도  
Fig. 4 New FWT signal flow graph of Paley order

반전은 매번 고속월쉬변환을 수행할 때마다 수행하여야 한다. 그러나 최종단에서의 비트 반전은 프로그램 작성시 처음 초기화 부분에서 참조 테이블을 작성 원하는 데이터의 위치를 찾기만 하면 되는 장점이 있다. 따라서 비트 반전 수행이 필요 없어진다. 변형된 신호 흐름도를 그림 5에 나타내었다.

또한  $x(n-N+1)$ ,  $x(n-N+2)$ , ...,  $x(n)$  샘플 시간에서 창에 포함된 N개의 샘플 값들이라고 하자. 그림 6은  $n=7$ 인 시간에서의 창의 고속월쉬변환의 신호 흐름을 나타낸 것이다.

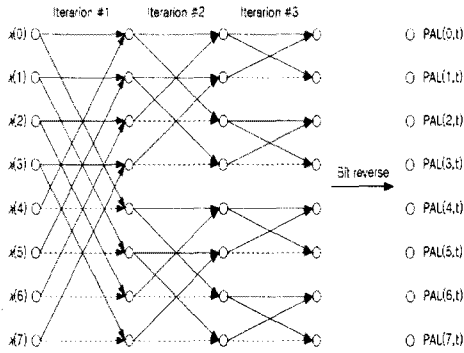


그림 5 변형된 신호 흐름도  
Fig. 5 Modified signal flow graph

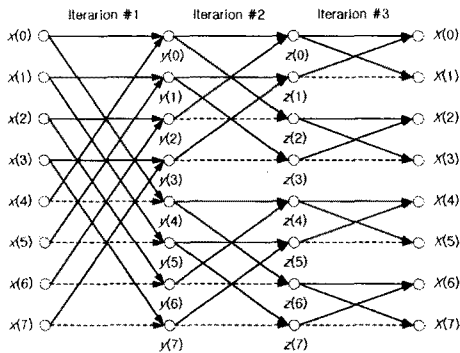


그림 6 고속윌쉬변환 신호 흐름도 (N=8, n=7)  
Fig. 6 FWT signal flow (N=8, n=7)

새로운 샘플  $x(8)$ 의 경우 새로운 창으로 들어가면 가장 오래된 값  $x(0)$ 은 창에서 제외된다. 이것은  $n=8$ 에 대한 그림 7에 나타난 것처럼 첫 번째 반복에서 단순히 위의 방향으로 이동(shifting)시킴으로써 이루어진다. 그림 6과 그림 7에서 편의를 위해 중간에 모든 변수들도 즉, iteration #1, iteration #2, iteration #3의 변수들도 모두 이동시켰다. 그림 6과 그림 7을 비교하면, 각 iteration의 변수들 중에는 이전 샘플링 순간에 연산된 결과가 변하지 않으므로 다시 연산을 하지 않아도 되는 변수들이 존재한다. 첫 번째 iteration을 구성하는 4개의 나비선도들을 이동시키면 이전 샘플링 순간에서  $x(0)$ 와 쌍을 이루었던  $x(4)$ 는  $x(8)$ 과 결합되어야만 한다. 그래서 그림 7의 첫 번째 iteration에 두꺼운 선으로 표현한 나비선도만 다시 계산하면 된다.

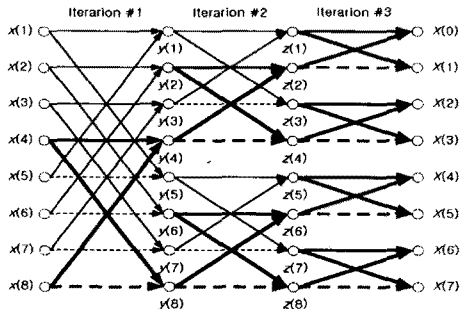


그림 7 고속윌쉬변환 신호 흐름도 (N=8, n=8)  
Fig. 7 FWT signal flow graph (N=8, n=8)

따라서 두 번째 iteration에서는 2개의 나비선도만이 다시 계산되면 된다. 마지막으로 세 번째 iteration에서는 4개의 나비선도가 다시 계산되면 된다. 요약해보면 고속 윌쉬변환의 moving-window내에는 12개의 나비선도 중에 단지 7개의 나비선도만이 변화하게 됨을 알 수 있다. 여기서 다시 계산되어야만 하는 나비선도들을 보면 2진 트리를 구성함을 알 수 있다. 이 트리는 왼쪽에서 오른쪽으로 확산되는 형태이다. 임의의 값  $N$ 에 대하여, 개선된 고속윌쉬변환을 얻기 위해 다시 계산하여야 하는 나비선도의 개수는 기존의 고속 윌쉬변환에서의  $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$ 개의 나비선도 대신에 다음에 나타낸 것과 같은 나비선도의 개수를 다시 계산하면 된다.

$$1+2+4+\dots+\frac{N}{2}=N-1 \quad (3.1)$$

따라서 전체 연산량은  $2(N-1)$ 회의 가감산 연산만을 수행하면 된다. 이와 같이 연산량을 개선하기 위해서는 앞에서 설명한 것처럼 샘플링되어 들어온 입력 값들이 시간의 흐름 순서에 맞추어 이동하여야 하므로 기존에 사용하였던 것처럼 입력 부에서 비트 반전(bit reverse)을 먼저 수행하면 나비선도의 이동 이전의 연산 결과 값을 이용할 수가 없게 된다. 그러므로 입력 신호가 샘플링 되어 입력된 시간 순서에 따라 배열될 수 있도록 하기 위해서 그림 3의 신호흐름도를 변형하였다. 즉, 고속윌쉬변환이 이루어진 후에 원하는 결과 값을 취득하면 되므로 비트반전을 고속윌쉬변환이 완료된 후에 수행하였으며, 또한 개선된 고속윌쉬변환에서는 최종단의 비트반전은 프로그래밍을 수행하는데 있어서는 원하는 성분의 연산 결과 값만의 위치를 확인하는 것으로 이용하면 되므로 수행을 하지 않아도 된다. 이렇게 해서 최종적으로 얻어진 개선된 고속윌쉬변환의 신호흐름도는 그림 8과 같다.

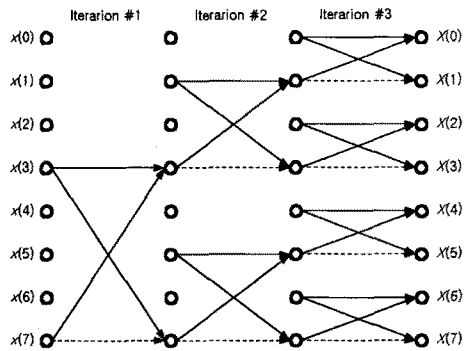


그림 8 개선된 고속윌쉬변환 신호흐름도 (N=8)  
Fig. 8 Improved FWT signal flow graph (N=8)

또한 Walker[1]는 DFT에서  $N$  샘플링에 대하여 유효한 계수는  $N/4$ 조파까지의 계수라고 밝혔다. 즉, 디지털 필터를 수행하기 위해서는 연속합수를 이용할 경우에는 하나의 주파수를 검출하기 위해서는 샘플링 주파수가 최소한 검출하고자 하는 주파수의 2배 이상이어야 하고, 이산합수를 이용할 경우에는 검출 주파수의 4배 이상의 샘플링 주파수를 가져야 한다[3-4][6-7]. 따라서  $N/4$ 의 고조파 성분에 대한 변환을 수행하면 되므로 연산량은 더욱 감소한다.

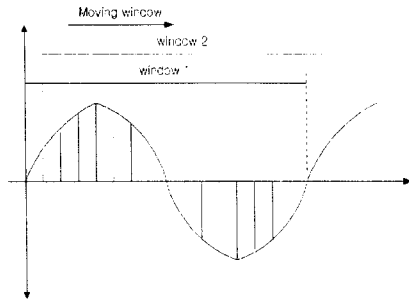


그림 9 이동 데이터 창  
Fig 9 Moving data window

이와 같이 연산량이 중요한 것은 그림 9와 같이 창을 샘플 단위로 이동하면서 구성하면 샘플링과 샘플링 사이에 모든 연산이 완료되어야 하기 때문이다. 16 샘플링을 하여 주어진 전기신호를 검출 한 경우 기존의 방법과 제시한 방법에 대하여 연산량을 비교하면 다음 표 2와 같다.

표 2 16샘플에 대한 연산량 비교  
Table 2 Comparison of computation for 16 sample

방법 성분	윌쉬변환 (WT)	고속윌쉬변환 (FWT)	제안한 방법
기본파	가감산 : 30	가감산 : 46	가감산 : 21
2조파	가감산 : 30		
3조파	가감산 : 30		
4조파	가감산 : 30		
계	가감산 : 120	가감산 : 46	가감산 : 21

여기서 더 많은 고조파 성분을 추출하기 위해서는 샘플링 수를 증가시켜야 하는데 이렇게 샘플링 수가 증가하면 기존의 방법으로는 실시간으로 처리가 불가능하다. 하지만 본 논문에서 제시한 방법은 단지 N 샘플링에 대하여 최대 2(N-1)번의 가·감산만 수행하면 되므로 기존의 다른 알고리즘을 이용하는 것보다는 실시간 처리가 더욱 가능하다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 개선된 고속 윌쉬변환 알고리즘을 유도하여 직교필터의 연산량을 감소시켰는데 얻어진 결론은 다음과 같다.

- (1) N샘플에 대하여 기존의 고속 윌쉬변환은  $N \log_2 N$ 번의 가감산 연산이 필요하였는데 본 논문에서 제안한 개선된 고속 윌쉬변환은 줄어든 연산량인 2(N-1)번의 가감산 연산만으로 변환이 가능하게 하였다.
- (2) 만약 하나의 주파수만을 계측한다면 첫 Iteration에서는 1번 그 외의 Iteration에서는 2번의 가감산만이 필요하게 되어  $2(\log_2 N - 1) + 1$ 번의 가감산 연산만이 필요하다. 즉 16 샘플에서 기본파만을 검출한다면 7번의 가감산 연산만 수행하면 된다.

따라서 본 논문의 연구결과는 배전반에 장착되는 고속 디지털 보호계전기, 전류, 전압 등을 계측하는 고정밀 디지털 미터 등에 응용이 가능하다. 또한 최근 각 나라에서 요구되는 고조파 측정장치 및 그 외 SCADA 시스템과 같은 통합시스템에서의 전류, 전압의 기본파 및 각각

의 고조파 성분의 계측에 적용이 가능하며, 그리고 전력 및 전력량 등의 계측에도 적용이 가능하다고 생각되며 향후 실제 시스템에 적용하고자 한다.

#### (참 고 문 헌)

- [1] G. Ott, L.N. Walker, "Transmission Line Fault Locator", Annual Conference of Protective Relay Engineers, Texas A&M University, College Station, TX, April 1974.
- [2] O.P. Malik, P.K. Dash, G.S. Hope, "Digital Protection of a Power Transformer", IEEE Publication 76CH1075-1 PWR, Paper No. A76 191-7, IEEE PES Winter meeting, New York, January 1976, pp. 1-7.
- [3] P.G. McLaren, M.A. Redfern, "Fourier-Series Techniques Applied to Distance Protection", Ibid, pp. 1301-1305.
- [4] A.V. Openheim, R.V. Schafer, "Discrete-Time Signal Processing", New Jersey, Prentice Hall, 1989.
- [5] 안두수, "직교함수와 응용", 복두출판사, 1997
- [6] N.Ahmed, K.R.Rao, "Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing", Springer-Verlag, 1975
- [7] K.G. Beauchamp, "Walsh Functions and Their Applications", Academic Press, 1975