

LMI기법을 이용한 정방 비결합 제어기의 H_2 설계

이종성¹, 강기원¹, 조용석², 박기현²
 성균관대학교 전기·전자 및 컴퓨터 공학부¹, 건양대학교 정보전자 공학부²

H_2 Design for the Square Decoupling Controllers Using LMI Method

Jong-Sung Lee, Kiwon Kang, Yong-Suk Cho, Kiheon Park,
 Sung-Kyun-Kwan University¹, KONYANG University²

Abstract - This paper presents an LMI(Linear Matrix Inequalities) method for designing the optimal decoupling controller. The proposed controller based on the Two-Degree-of-Freedom configuration considers both the performance of controller and decoupling properties. The decoupling controller parameters are obtained from LMI method for computational efficiency.

1. 서 론

현재에 사용되고 있는 수많은 제어 시스템들은 산업구조의 다변화, 복잡화, 대형화 등에 따라 기존의 단일 입력 출력 시스템뿐만 아니라 다중 입력과 다중 출력을 가지는 다변수 시스템이 많이 등장하게 되었다. 따라서 이러한 다변수 특성을 이용한 다변수 제어 시스템 설계가 널리 이용되고 있는데 [1][2][3][4] 이 경우 문제점은 입출력 변수들 사이에 많은 결합(coupling)이 존재하여 효율적인 제어를 어렵게 만든다는 것이다. 따라서 비결합 제어 문제는 다변수의 입력과 출력 사이의 결합 효과를 제거하여 각 채널의 출력 변수는 대응되는 입력 신호에 의해서만 독립적으로 조정되도록 제어기를 설계하는 것이다. 이에 대한 연구동향을 살펴보면 [5]에서는 비결합 조건과 함께 최적 안정도 여유 문제를 다루었는데, 모두 1-자유도 구조의 제어기이므로 성능 개선에 근본적인 제한이 있었다. 또한 2 혹은 3자유도 구조의 비결합 제어기 문제는 [6][7][8]에서 다루어졌는데 제어기의 공식이 워너-호프 분해항을 이용한 전달행렬 형태로 서술되어 있기 때문에 계산상에 어려움이 많았다.

따라서 본 논문에서는 제어기의 계산을 용이하게 하기 위하여 비결합 제어기의 전달 행렬을 상태공간 계수식으로 표현하였다. 이렇게 표현된 상태공간 계수식을 이용하면 주어진 H_2 문제를 선형 행렬 부등식(LMI: Linear Matrix Inequalities, 이하 LMI) 형태로 표시할 수 있으며 [9], 이러한 문제는 시스템 및 제어 이론에서 다루어지는 볼록할 최적화 문제(convex optimization problem)로 설정될 수 있다. 그러므로 본 논문에서는 LMI를 이용하여 시스템의 성능 최적화에 초점을 둔 비결합 제어기의 H_2 설계에서 비결합 제어기의 자유 매개변수 값들을 구하는데 효과적인 방법을 제시하였다.

2. 본 론

2.1 비결합 제어 문제

본 논문에서 다루는 비결합 문제는 기준 입력 추종 문제와 관련이 있으므로 기준 입력 $r(s)$ 를 분리하여 처리할 수 있는 구조가 필요한데 이를 가능케 하는 구조가 그림 1의 2자유도 표준 모델 구조이다. 이러한 구조를 채택하면 물리적으로 성격이 다른 기준입력신호와 측정 잡음 및 외란 신호를 분리하여 처리할 수 있기 때문에 기준 입력 추종에 관련된 비결합 제어기의 성능개선에

효과적인 구조가 된다.

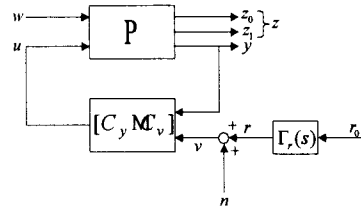


그림 1. 2자유도 구조의 표준 모델

그림 1에서 각 신호 $w(s), u(s), z(s)=[z_0' z_1']'$, $y(s), r(s), n(s)$ 는 각각 외부입력, 제어 입력, 조정 변수, 측정 변수, 그리고 기준입력과 입력 잡음이고, 조정 변수 중 $z_0(s)$ 는 기준입력 $r(s)$ 를 추종하는 변수이고, $z_1(s)$ 은 그 외의 변수들을 표시한다. 또한 제어기 전달 행렬

$$T_c(s) = [C_y : C_v : C_r(s)] \tag{1}$$

는 2자유도 제어기 구조이고, 시스템 전달 함수를

$$\begin{bmatrix} z_0(s) \\ z_1(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{01} & P_{02} \\ P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \tag{2}$$

와 같이 나타내면, 조정 변수 $z(s)$ 는

$$z(s) = \begin{bmatrix} z_0(s) \\ z_1(s) \end{bmatrix} = T_{zw}(s)w(s) + T_{zv}(s)v(s) \tag{3}$$

이다. 여기에서

$$T_{zw}(s) = \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix} R_y P_{21} \tag{4}$$

$$T_{zv}(s) = \begin{bmatrix} P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix} R_v \tag{5}$$

$$[R_y : R_v] = (I - C_y P_{22})^{-1} [C_y : C_v] \tag{6}$$

로 나타낼 수 있는데, 식(6)에서 C_y, C_v 를 구하면

$$[C_y : C_v] = (I + R_y P_{22})^{-1} [R_y : R_v] \tag{7}$$

이 되므로 (R_y, R_v) 와 (C_y, C_v) 는 1:1 대응관계가 있다. 따라서 본 논문에서는 앞으로 편의상 전달함수 (R_y, R_v) 를 제어기로 부르기로 하고, 비결합 문제가 기준 입력 추종 문제와 관계 있기 때문에 결국 원하는 조

건을 갖는 R_v 를 구하는 문제라고 생각할 수 있다. 두 제어기의 설계에서 R_v 는 임의의 제어 기법을 이용하여 안정한 제어기 형태를 별도로 구했다고 가정하고, 본 논문에서는 비결합 조건을 만족시키는 R_v 만을 구하기로 한다.

2.2 평가함수 설정

일반적으로 표준 모델의 경우에는 $z(s)$ 의 평균 전력 (average power)을 평가 함수로 생각하지만 [3][4] 본 논문처럼 그림 1과 같은 2자유도 구조의 표준 모델을 가질 때 기준 입력을 별도로 고려하는 경우 평가 함수를 식(8)의 평균전력으로 생각하자.

$$e(s) = \begin{bmatrix} Q_1(s)(r(s) - z_{10}(s)) \\ -Q_2(s)z_{n1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(s)(\Gamma_r(s)r_0 - z_{10}(s)) \\ -Q_2(s)z_{n1}(s) \end{bmatrix} \quad (8)$$

따라서 $e(s)$ 의 파워 스펙트럼을 $\Phi_e(s)$ 로 표시하면 평가 함수는 $v = r + n$ 에 의해 식(9)가 된다.

$$E_v = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{Tr} \{ (I_0 - \tilde{P}_{12}R_v)\Phi_e(I_0 - \tilde{P}_{12}R_v) + \tilde{P}_{12}R_v\Phi_nR_v^* \tilde{P}_{12}^* \} ds \quad (9)$$

여기서, $I_0 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{P}_{12}(s) = \begin{bmatrix} P_{02}(s) \\ -P_{12}(s) \end{bmatrix}$ 이다. 이제 식(9)를 2-노움의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$E_v = \|[(I_0 - \tilde{P}_{12}R_v)\Gamma_r : \tilde{P}_{12}R_v\Gamma_n]\|_2^2 \quad (10)$$

식(10)으로 주어지는 평가함수를 [10]에 표시된 상태공간 계수식을 이용하여 H_2 표준형으로 표시하면 다음과 같다.

$$E_v \triangleq \|T_1 + T_2DT_3\|_2^2 \quad (11)$$

이 되고, 여기서

$$T_1 = \begin{bmatrix} F_r & G_r & 0 \\ H_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_2(s) = \begin{bmatrix} F_e & G_e H_N & -G_e J_e' \\ 0 & F_\Delta & -G_\Delta \\ \tilde{H}_1 - J_{12}K_1 & J_{12}R_1^{-1/2}H_N & -J_{12}R_1^{-1/2}J_e' \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} F_d & G_d \\ H_d & J_d \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} F_d & G_d & 0 \\ H_d & 0 & J_n \end{bmatrix}$$

이 된다. 이것을 다시 LFT로 표시하면

$$E_v = \|F_l \left(\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix}, D \right)\|_2^2 \quad (12)$$

이 된다. 그런데 $D(s)$ 가 비결합 제어기 형태인 정방의 대각 행렬로 나오기 위해서는 F_d, G_d, H_d, J_d 의 수 많은 형태의 조합이 있으며, 이러한 모든 형태를 지정하기는 불가능하고, 항상 구조적으로 정방의 대각 행렬형태를 보장해 주어야 하는데, 이를 위해서 다음과 같은 H_2 표준형

$$\| (T_1 + T_2DT_3) \|_2^2 < \alpha \quad (13)$$

에 벡터를 취하여도 2-노움값에는 영향을 미치지 않는 성질을 이용하면 [11]

$$\| \text{vec} (T_1 + T_2DT_3) \|_2^2 < \alpha$$

$$\rightarrow \| \text{vec} T_1 + T_3' \odot T_2 \cdot \text{vec} D \|_2^2 < \alpha \quad (14)$$

이 된다. 즉, $\text{vec} D(s)$ 를 구하여 이것을 주 대각 행렬로 배치하면 정방의 대각 행렬형태인 $D(s)$ 를 항상 구할 수 있다. 그리고 식(14)에서 $\overline{T}_1 \triangleq \text{vec} T_1$, $\overline{T}_2 = T_3' \odot T_2$, $\overline{T}_3 = I$ 로 놓으면 벡터를 취한 후의 일반화된 H_2 표준형으로 다시 표시할 수 있다.

$$\| \overline{T}_1 + \overline{T}_2 \overline{D} \overline{T}_3 \|_2^2 < \alpha \quad (15)$$

또한 $\text{vec} D(s)$ 의 상태 공간 계수 $\overline{D}(s) = \begin{bmatrix} \overline{F}_d & \overline{G}_d \\ \overline{H}_d & \overline{J}_d \end{bmatrix}$ 로 놓으면 벡터를 취한 후의 LFT형태로 나타낼 수 있다.

$$\| F_l \left(\begin{bmatrix} \overline{T}_1 & \overline{T}_2 \\ \overline{T}_3 & 0 \end{bmatrix}, \overline{D} \right) \|_2^2 < \alpha \quad (16)$$

그리고 비결합 제어기 R_v 에서 자유 매개변수인 $\overline{F}_d, \overline{G}_d, \overline{H}_d, \overline{J}_d$ 가 주어지는 경우 벡터를 취한 후의 전체 페루프 전달함수의 상태공간 모델은

$$\begin{bmatrix} \overline{F}_{cl} & \overline{G}_{cl} \\ \overline{H}_{cl} & \overline{J}_{cl} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \overline{F}_t + \overline{G}_t \overline{J}_d \overline{H}_t & \overline{G}_t \overline{H}_d & \overline{G}_w + \overline{G}_t \overline{J}_d \overline{J}_w \\ \overline{G}_d \overline{H}_t & \overline{F}_d & \overline{G}_d \overline{J}_w \\ \overline{H}_{1z} + \overline{J}_{1z} \overline{J}_d \overline{H}_t & \overline{J}_{1z} \overline{H}_d & \overline{J}_{1zv} + \overline{J}_{1z} \overline{J}_d \overline{J}_w \end{bmatrix} \quad (17)$$

이 된다.

2.3 비결합 제어기의 LMI 표현

$E_v = \| \text{vec} [(I_0 - \tilde{P}_{12}R_v)\Gamma_r : \tilde{P}_{12}R_v\Gamma_n] \|_2^2 < \alpha$ 를 만족하는 비결합 제어기 R_v 에서 자유 매개변수인 $\overline{F}_d, \overline{G}_d, \overline{H}_d, \overline{J}_d$ 를 구하는 문제를 LMI형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \overline{F}_{cl}^T P + P \overline{F}_{cl} & P \overline{G}_{cl} \\ \overline{G}_{cl}^T P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} P & \overline{H}_{cl}^T \\ \overline{H}_{cl} & aI \end{bmatrix} > 0 \quad (19)$$

$$\overline{J}_{cl} = 0 \quad (20)$$

위의 식(18)에서 자유매개변수 P 와 비결합 제어기의 자유 매개변수가 곱으로 표시되어 선형결합이 아닌 비선형 결함으로 되는데 [12]에서 제시한 방법을 이용하면 선형결합의 LMI로 표현이 되어 비결합 제어기의 자유 매개변수를 구할 수 있다.

3. 적용 예

그림 2의 시스템에서 비결합 제어기 R_v 의 계산에 필요한 $D(s)$ 를 LMI기법을 이용하여 구하는 과정을 예시하겠다. 그림 2의 모델에서 다음과 같이

$$P_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s-3} & \frac{s^2-3s+2}{(s-3)(s-4)} \\ \frac{1}{s-3} & \frac{(s^2-8)}{(s-3)(s-4)} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \overline{F}_o & \overline{G}_o \\ \overline{H}_o & \overline{J}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\Gamma_r(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

이 주어지는 경우 먼저 식(5)에서 시스템의 전달행렬을 구하면

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_o(s) \\ 0 & I \\ I & P_o(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (23)$$

이 된다.

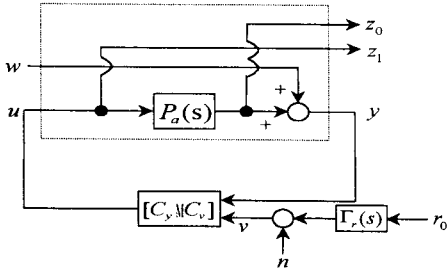


그림 2. 비결합 제어기의 적용 예

이 경우 기준입력 (r_{01})에는 사인함수, (r_{02})에는 0입력을 동시에 인가한 경우 이에 대응되는 출력변수 (z_{01}), (z_{02})의 파형과 이 때의 플랜트 입력 파형 (u_{01}), (u_{02})을 그림 4에 나타내었다. 또한 그림 5에서는 기준입력 (r_{01})에는 사인함수, (r_{02})에는 펄스함수를 동시에 인가한 경우 이에 대응되는 출력변수 (z_{01}), (z_{02})의 파형과 이 때의 플랜트 입력 파형 (u_{01}), (u_{02})를 그림 6에 나타내었다. 위의 모든 실험결과 2가지 경우 모두 비결합성을 만족하면서 각각의 출력 파형이 이에 대응되는 입력 신호에 의해 독립적으로 조정됨을 알 수 있었다.

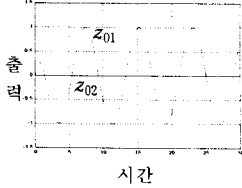


그림 3. r_{01}, r_{02} 에 사인함수와 0입력을 인가한 경우 출력 z_{01}, z_{02} 의 파형

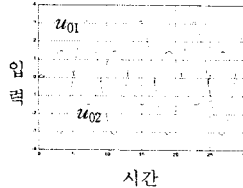


그림 4. r_{01}, r_{02} 에 사인함수와 0입력을 인가한 경우 플랜트 입력 u_{01}, u_{02} 의 파형

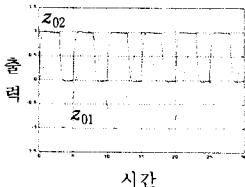


그림 5. r_{01}, r_{02} 에 사인함수와 펄스함수를 인가한 경우 출력 z_{01}, z_{02} 의 파형

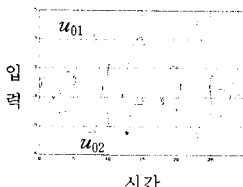


그림 6. r_{01}, r_{02} 에 사인함수와 펄스함수를 인가한 경우 플랜트 입력 u_{01}, u_{02} 의 파형

4. 결 론

본 논문에서는 2자유도 구조의 표준 플랜트 모델에서 기준입력과 지정된 출력사이의 전달행렬을 대각화 시키고 주어진 자승형태의 성능 평가 함수를 최소화시키는 비결합 제어기를 설계하였다. 이 경우 비결합 제어기의 자유 매개변수를 LMI기법을 이용하여 구하였다. 이 경

우 자유 매개변수 행렬 $D(s)$ 의 형태를 $vecD(s)$ 로 설정하여 비결합 제어기의 대각화 형태에 따른 구조적인 제한사항을 해결하였다. 또한 적용 예를 통하여 상태공간 영역에서 비결합 제어기의 H_2 설계가 성공적으로 이루어졌음을 확인할 수 있었다.

[참 고 문 헌]

- [1] D. C. Youla, H. Jabr, and J. J. Bongiorno, Jr., "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers-part II : The Multivariable Case," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-21, No.3, pp.319-338, June, 1976.
- [2] D. C. Youla and J. J. Bongiorno, Jr., "A feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf Design," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.AC-30, No.7, pp.652-665, July, 1985.
- [3] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.34, pp. 831-847, 1989.
- [4] K. Park and J. J. Bongiorno, Jr., "A General theory for the Wiener-Hopf design of multivariable control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.34, pp.619-626, 1989.
- [5] M. G. Safanov and B. S. Chen, "Multivariable stability margin optimization with decoupling and output regulation," in *Proc. Conf. Decision Contr.*, pp.616-622, Orlando, FL, Dec. 1982, and *IEE Proc.*, Vol. 129, pp.276-282, Nov., 1982.
- [6] C. A. Desoer and A. N. Gündes, "Decoupling linear multiinput-multioutput plants by dynamic output feedback: An algebraic theory," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.31, No.8, pp.744-750, 1986.
- [7] H. P. Lee and J. J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of optimal decoupled multivariable feedback control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.38, No.12, pp.1838-1843, Dec., 1993.
- [8] H. P. Lee and J. J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of optimal decoupling controllers for plant with non-square transfer matrices," *Interantional J. of Control*, Vol. 58, No. 6, pp.1227-1246, 1993.
- [9] S. Boyd, L. E. Ghoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, Vol. 15, 1994.
- [10] 박기현, "비결합 제어 시스템의 워너-호프 설계와 상태공간 계산 공식," *Report SKK-CAL-99-02*.
- [11] J. W. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, No.9, Sep., 1978.
- [12] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 42, No. 7, Jul., 1997.