

축소 모델을 이용한 PID 동조 알고리즘

류영국, 조준호, 최정내, 황형수
원광대학교 공과대학 제어계측공학과

PID Tuning Algorithm Using Reduction Model

Ryu Young-guk, Cho Joon-ho, Choi Jung-nae, Hwang Hyung-su
Wonkwang Univ. Engineering of Control and Instrumentation

Abstract - The PID tuning algorithm which can be applied generally to processes with varies dynamic characteristics is proposed by Wang[7]. However, it can be applied well to process model without zeros and with $\angle G(j\omega)=-\pi/2$ and $-\pi$ point in Nyquist curve, but it gives unsatisfactory tuning performance for processes with zeros and without $\angle G(j\omega)=-\pi/2$ and $-\pi$ in Nyquist curve. In this paper, the method which improve it using Pade reduction method is proposed. Satisfactory responses can be expected for processes with various dynamics, including those with low or high order, small or large dead time, monotonic or oscillatory responses. Simulation examples are given to show the effectiveness and flexibility of the controller in handling processes of different characteristics.

하지 않는 경우에는 Wang의 방법을 적용하고 영점이 존재하는 경우에는 Pade 축소법을 응용한 방법을 사용함으로써 이를 개선하였다. 예를 통하여 본 논문에서 제안된 방법이 다양한 동특성을 갖는 공정에 적합함을 보였다.

2.1 모델 축소

단일 루프 폐환 제어 시스템이 그림 1에 보여진 것과 같고 공정 전달함수 $G(s)$ 또는 주파수 응답 $G(j\omega)$ 를 알고 있다고 가정한다.

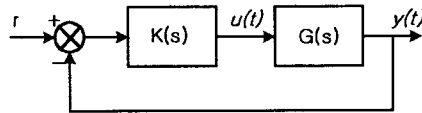


그림 1 단일 루프 폐환 제어 시스템
PID 제어기는 식(1)과 같이 표현된다.

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (1)$$

다양한 동특성을 갖는 일반적인 종류의 공정들에 대하여 PID 제어기가 좋은 성능을 갖도록 파라미터 K_P , K_I , K_D 를 결정해야 하며 고차 공정의 경우에는 파라미터 동조가 어려워 고차 모델을 저차 모델로 축소하여 저차 모델에 대하여 PID파라미터를 찾는 방법을 많이 사용한다. 저차 모델링에서 1차 모델이 많이 쓰이고 있지만 1차 모델은 실근만을 가지므로 진동하는 공정의 동특성을 표현하기 어려운 단점이 있다. 그래서 식(2)와 같은 2차의 축소 모델을 사용한다.

$$\hat{G}(s) = \frac{e^{-Ls}}{as^2 + bs + c} \quad (2)$$

여기서 a, b, c, L 은 결정해야할 미지수이며 a, b, c, L 의 값에 따라 식(2)의 모델은 실근 또는 허근을 가지므로 진동하는 공정의 동특성을 표현할 수 있다.

주어진 공정 $G(s)$ 를 두 가지 형태로 나누어 모델 축소 방법을 적용한다. 즉, 공정 모델에 영점이 존재하지 않는 경우와 존재하는 경우로 나눈다. 이는 Wang이 제안한 방법이 공정 모델에 영점이 존재할 경우와 Nyquist 선도가 $-\pi/2$ 와 $-\pi$ 를 지나지 않는 경우에는 동조 성능이 만족스럽지 못하기 때문이다.

Case I : 공정 모델에 영점이 존재하지 않는 경우.
이 경우에는 Wang이 제안한 방법을 사용하여 공정 모델을 식(2)의 모델로 축소한다. 4개의 미지수를 결정하기 위해서는 4개의 식이 필요하며 $\angle G(j\omega_c) = -\pi$,

$\angle G(j\omega_b) = -\frac{\pi}{2}$ 인 주파수 ω_c 와 ω_b 에서 원래 공정과 축소 모델의 주파수 응답이 일치하도록 함으로써 미지수를 결정할 수 있다. 즉, $G(j\omega_c) = \hat{G}(j\omega_c)$, $G(j\omega_b) = \hat{G}(j\omega_b)$ 인 조건으로부터 다음 식을 유도할 수

1. 서 론

PID 제어기는 구조가 간단하고 이해하기가 쉬우며 실제로 구현하기 쉽기 때문에 공정 산업 분야에서 가장 널리 사용되고 있는 제어기이다[2], [4], [5], [6]. 최적의 성능을 얻을 수 있는 PID 제어기의 파라미터를 결정하는 방법에 대하여 많은 연구가 이루어지고 있으며[1], 그 중에서 Ziegler-Nichols 규칙, Cohen-Coon 방법, IAE, ITAE, Internal Model Control(IMC)방법등이 보편적으로 사용되고 있다[5]. 그러나 이러한 방법들은 그 방법의 조건에 적합한 제어계에는 좋은 특성을 보이거나 다른 제어계에는 응답특성이 좋지 못하기 때문에 보다 일반적이고 범용성을 갖는 동조법에 대한 연구가 이루어지고 있다[2], [8].

이를 개선하기 위해 Wang등은 공정 모델을 시간 지연항을 갖는 2차 모델로 축소하고 축소된 모델에 대해 동조법을 적용함으로써 저차 및 고차, 크고 작은 지연시간, 단조롭거나 진동하는 응답등의 다양한 동특성을 갖는 공정들에 대해 범용적으로 적용할 수 있는 방법을 제안하였다[7].

Wang이 제안한 방법은 먼저 공정 모델을 시간 지연항을 갖는 2차 모델로 축소한다. 대부분의 동조법들이 근거로 하고 있는 시간 지연항을 갖는 1차 모델이 주파수 응답에서 피크치를 생성하지 못하는 반면에 2차 모델은 피크치를 생성할 수 있는 장점을 가진다. 이 모델은 저차임에도 불구하고 제어 성능에 중요한 주파수 영역에서 실제 공정과 거의 같은 Nyquist응답을 갖는다. 이렇게 축소된 모델에 대해 페루프 극점 소거 방법을 이용하여 제어기 파라미터를 결정하게 된다. 페루프 극점들은 제동비와 지연시간에 따라 결정된다.

그러나 Wang이 제안한 방법은 공정 모델에 영점이 존재하지 않는 경우에는 잘 적용이 되지만 공정 모델에 영점이 존재하는 경우에는 동조 성능이 만족스럽지 못하였다. 본 논문에서는 공정 모델을 두 가지 형태(영점이 존재하지 않는 것과 존재하는 것)로 분류하고 영점이 존재

있다.

$$c - a\omega_c^2 + j b \omega_c = \frac{\cos(\omega_c L) - j \sin(\omega_c L)}{-|G(j\omega_c)|} \quad (3)$$

$$c - a\omega_b^2 + j b \omega_b = \frac{\cos(\omega_b L) - j \sin(\omega_b L)}{-j |G(j\omega_b)|} \quad (4)$$

위 식들을 이용하여 아래와 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} = \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|} = \theta \quad (5)$$

$$a = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[\frac{\sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (6)$$

$$b = \frac{\sin(\omega_c L)}{\omega_d |G(j\omega_c)|} \quad (7)$$

$$c = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[\frac{\omega_c^2 \sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\omega_b^2 \cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (8)$$

식(5)는 비선형 방정식으로 직접적으로 해를 얻기 어렵지만 초기치를 잘 설정하면 Newton-Raphson 반복법을 사용하여 해를 구할 수 있다. 초기치를 설정하기 위해 sin함수와 cos함수를 아래와 같이 근사화한다.

$$\sin(x) = px^2 + qx \quad \cos(x) = px^2 + rx + 1$$

여기서 $p = (8/\pi^2)(1 - \sqrt{2})$, $q = (2/\pi)(2\sqrt{2} - 1)$,

$r = (2/\pi)(2\sqrt{2} - 3)$ 이다. 식(5)에 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$p(\omega_c^2 - \theta \omega_b^2)L^2 + (q\omega_c - \theta r\omega_b)L - \theta = 0 \quad (9)$$

여기서 $\theta = (\omega_c |G(j\omega_c)| / \omega_b |G(j\omega_b)|)$ 이다. 식(9)의 근 중에서 절댓값이 작은 근을 초기치로 설정하고 Newton-Raphson 방법을 적용한다.

$$L_2 = L_1 - \frac{f(L_1)}{f'(L_1)} \quad (10)$$

여기서 $f(L) = \frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} - \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|}$

$$f'(L) = \frac{\omega_b \sin(\omega_b L) \sin(\omega_c L) + \omega_c \cos(\omega_b L) \cos(\omega_c L)}{\cos^2(\omega_b L)}$$

Case II : 공정모델에 영점이 존재하는 경우.

공정모델에 영점이 존재할 경우 식(2)의 축소모델 대신에 식(11)의 모델로 축소한다.

$$\hat{G}(s) = \frac{ps + q}{as^2 + bs + c} e^{-Ls} \quad (11)$$

여기서 a, b, c, L 은 공정모델에서 분자항을 제외한 부분에 대해 Case I의 방법을 적용하여 구한다. p, q 를 구하기 위해 Pade 축소법[9]을 이용한다.

Pade 축소법 : 공정모델 $G(s)$ 가 아래와 같다고 하자.

$$G(s) = \frac{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_ms^m}{e_0 + e_1s + e_2s^2 + \dots + e_ns^n} \quad (12)$$

$G(s)$ 를 멱급수 전개하면 다음을 얻는다.

$$G(s) = f_0 + f_1s + f_2s^2 + \dots$$

여기서 $f_0 = \frac{d_0}{e_0}$, $f_1 = \frac{1}{e_0} [d_1 - e_1f_0]$ 이다. 축소모델의

분자항은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$q = cf_0, \quad p = cf_1 + bf_0$$

2.2 PID 동조

식(2)의 모델에 대해서는 Wang이 제안한 동조법을 적용하고 식(11)의 모델에 대해서는 본 논문에서 제안한 방법을 적용한다.

Case I : 먼저 시상수 τ_0 와 개루프 제동비 ζ_0 를 결정한다. 등가 시상수 τ_0 는 공정의 응답 속도에 반비례한

다. 단조로운 공정의 응답 속도는 우세극의 위치에 영향을 받으며 진동하는 공정의 응답속도는 복소극의 실수부에 관계된다. 등가 시상수 이론[10]으로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\tau_0} = \begin{cases} \sqrt{b^2 - 2ac} & b^2 - 4ac \geq 0 \\ \frac{b}{2a} & b^2 - 4ac < 0 \end{cases} \quad (13)$$

여기서 a, b, c 는 모델 파라미터이며 식(6)-(8)로부터 계산될 수 있다. 개루프 제동비 ζ_0 는 다음 식으로 정의된다.

$$\zeta_0 = \begin{cases} \frac{b}{2\sqrt{ac}} & b^2 - 4ac < 0 \\ 1 & b^2 - 4ac \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

식(1)의 PID 제어기는 식(15)와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$K(s) = k \left(\frac{As^2 + Bs + C}{s} \right) \quad (15)$$

여기서 $A = (K_D/k)$, $B = (K_P/k)$, $C = (K_I/k)$ 이다. 모델의 극점이 소거되도록 제어기의 영점을 선택한다. 즉, $A = a$, $B = b$, $C = c$ 로 선택하면 개루프 전달함수는 식(16)처럼 된다.

$$\hat{G}(s)K(s) = \frac{ke^{-Ls}}{s} \quad (16)$$

적절한 k 값을 사용함으로써 식(16)의 페루프 극점을 선택할 수 있다. 모델의 극점이 소거되도록 제어기 영점을 설정했지만 축소된 모델에 대한 것이기 때문에 실제로 완벽한 소거는 불가능하다. 진동하는 공정은 소거되지 않은 극점이 응답에서 진동을 유도하므로 실수극을 선택한다. 반대로 단조로운 공정에 대해서는 응답속도 개선을 위해 복소극을 선택한다. 이와 같은 개념으로 극점 선택을 두 가지 경우로 나눈다.

1. $\zeta_0 > 0.7071$ 이거나 $0.05 < (L/\tau_0) < 0.15$ 혹은 $(L/\tau_0) > 1$ 인 경우

이 경우에는 복소극을 선택한다. 원하는 두 극점이 다음과 같다고 하자.

$$s = -\omega_n \zeta_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$$

위상 조건과 크기 조건으로부터 다음을 얻는다.

$$-\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} L - (\pi - \cos^{-1} \zeta_n) = -\pi \quad (17)$$

$$\omega_n = \frac{\cos^{-1} \zeta_n}{L \sqrt{1 - \zeta_n^2}} \quad (18)$$

$$k = \omega_n e^{-\omega_n L \zeta_n} \quad (19)$$

$\zeta_n = 0.7071$ 을 식(18)과 (19)에 대입하면 k 를 결정할 수 있다.

$$k = 0.5 / L \quad (20)$$

2. $\zeta_0 \leq 0.7071$ 또는 $0.15 \leq (L/\tau_0) \leq 1$ 인 경우

이 경우에는 실중극을 선택한다. 원하는 근이 $s_{1,2} = -(1/\tau_0)$ 라면 다음을 얻는다.

$$k = \frac{1}{\tau_0} e^{(L/\tau_0)} \quad (21)$$

위의 근 $s_{1,2}$ 가 이탈점 이전의 값이 아닐 경우 $s_{1,2}$ 로 이탈점을 사용하며 이탈점을 찾기 위해 식(18)로부터 다음을 얻는다.

$$\lim_{\zeta_n \rightarrow 1} \omega_n = \lim_{\zeta_n \rightarrow 1} \left(\frac{\cos^{-1} \zeta_n}{L \sqrt{1 - \zeta_n^2}} \right) = \frac{1}{L} \quad (22)$$

따라서, 이탈점과 이득은 다음과 같다.

$$s_{1,2} = -\omega_n \zeta_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}, \zeta_n = 1 = \omega_n = -(1/L)$$

$$k_{\text{break}} = -s e^{sL} \Big|_{s=-1/L} = \frac{1}{eL} \quad (23)$$

k는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$k = \min \left\{ \frac{1}{\tau_0} e^{-(L/\tau_0)}, \frac{1}{eL} \right\} \quad (24)$$

마지막으로 PID 파라미터는 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} K_P \\ K_I \\ K_D \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix} \quad (25)$$

Case II : 이 경우에는 식(1)의 제어기형태 대신에 다음과 같은 미분필터선행형을 사용한다.

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + T_F s} \quad (26)$$

위 식을 다시 쓰면 아래와 같다.

$$K(s) = k \left(\frac{As^2 + Bs + C}{s(1 + T_F s)} \right) \quad (27)$$

이때 $A = (K_P T_F + K_D) / k$, $B = (K_P + K_I T_F) / k$,

$C = K_I / k$ 이다. $A = a$, $B = b$, $C = c$, $T_F = p/q$ 로 선택하면 개루프 전달함수는 다음과 같다.

$$K(s) \hat{G}(s) = k q \frac{e^{-Ls}}{s} = k' \frac{e^{-Ls}}{s} \quad (28)$$

위 식은 식(16)과 같은 형태이므로 위에서와 같은 방법을 사용하여 k' 를 결정할 수 있다. 그러면 제어기 파라미터는 다음과 같이 된다.

$$k = k' / q, \quad K_I = ck,$$

$$K_P = b k - K_I T_F, \quad K_D = a k - K_P T_F \quad (29)$$

2.3 시뮬레이션 및 고찰

시뮬레이션은 영점을 갖는 모델을 대상으로 하여 성능 평가 지수 IAE, ITAE, ISE, ITSE, Overshoot를 사용하여 Wang의 방법과 비교하였다.

Example 1.

$$G(s) = \frac{s^2 + 5.5s + 6}{s^3 + 9s^2 + 20s + 12} e^{-0.5s} \quad (30)$$

본 논문에서 제안된 방법에 의하여 축소된 모델은 식(31)과 같다.

$$\hat{G}(s) = \frac{4.6308s + 6.1247}{6.6259s^2 + 18.4488s + 12.2494} e^{-0.5815s} \quad (31)$$

식(31)의 축소모델에 대한 PID제어기는 다음과 같다.

$$K(s) = 1.3064 + \frac{1.7419}{s} - \frac{0.0029s}{1 + 0.7561s} \quad (32)$$

시뮬레이션 결과와 성능지수 값들은 그림 2에 주어졌다.

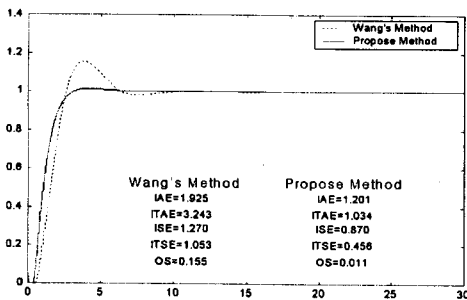


그림 2 Example 1의 단위계단응답.

Example 2 :

$$G(s) = \frac{28s^3 + 496s^2 + 1800s + 2400}{2s^4 + 36s^3 + 204s^2 + 360s + 240} e^{-0.9s} \quad (33)$$

축소 모델은 식(34)와 같이 얻어진다.

$$\hat{G}(s) = \frac{1736.7s + 1952.6}{56.8521s^2 + 320.1202s + 195.2628} e^{-0.9753s} \quad (34)$$

위 축소 모델에 대해 동조된 PID 제어기는 다음과 같다

$$K(s) = 0.0389 + \frac{0.0519}{s} - \frac{0.0195s}{1 + 0.8894s} \quad (35)$$

시뮬레이션 결과와 성능지수 값들은 그림 3에 주어졌다.

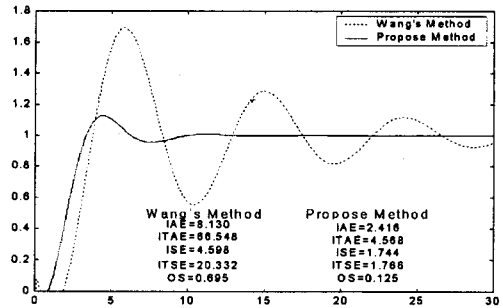


그림 3 Example 2의 단위계단응답

3. 결론

다양한 동특성을 갖는 공정에 범용적으로 적용할 수 있는 PID동조법으로써 Wang등은 공정 모델을 시간 지연 항을 가지는 2차의 모델로 축소하고 축소된 모델에 대하여 동조법을 적용하는 방법을 제안하였으나 이 방법은 공정모델에 영점이 존재하거나 Nyquist선도가 $-\pi/2$ 나 $-\pi$ 를 지나지 않는 경우에는 동조 성능이 만족스럽지 못하였다. 본 논문에서는 공정 모델에 영점이 존재할 경우 Pade축소법을 응용한 방법을 적용하여 모델을 축소하였고 축소된 모델에 대해 미분필터 선행형 PID 제어기를 적용함으로써 이를 개선하였다.

[참고 문헌]

- [1] K. J. Astrom, "Automatic tuning of PID regulators", Instrument Soc. Amer., 1988
- [2] K. J. Astrom and T. Hagglund, "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins", Automatica, vol. 20, no. 5, pp. 645-651, 1984.
- [3] W. K. Ho, C. C. Hang, and L. S. Cao, "Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications", Automatica, vol. 31, no. 3, pp. 497-502, 1995.
- [4] W. K. Ho, C. C. Hang, W. Wojsznis, and Q.H. Tao, "Frequency domain approach to self-tuning PID control", Contr. Eng. Practice, vol. 4, no. 6, pp. 807-813, 1996.
- [5] W. K. Ho, O. P. Gan, E. B. Tay, and E. L. Ang, "Performance and gain and phase margins of well-known PID tuning formulas", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 4, pp. 473-477, 1996.
- [6] M. Zhuang and D. P. Atherton, "Automatic tuning of optimum PID controllers", Proc. Inst. Elect. Eng., vol. 140, pt. D, no. 3, pp. 216-224, May 1993.
- [7] Q. G. Wang, T. H. Lee, H. W. Fung, Q. Bi, and Y. Zhang, "PID Tuning for Improved Performance", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 7, no. 4, 457-465, July 1999.
- [8] K. Y. Kong, S. C. Goh, C. Y. Ng, H. K. Loo, K. L. Ng, W. L. Cheong, and S. E. Ng, "Feasibility report on frequency domain adaptive controller", Dept. Elect. Eng., Nat. Univ. Singapore, Internal Rep., 1995.
- [9] Y. Shamash, "Linear system reduction using Pade approximation to allow retention of dominant modes", INT. J. Control, vol. 21, no. 2, pp. 257-272, 1975.
- [10] A. S. Sedra and K. C. Smith, Microelectronic Circuits, 2nd ed. New York: Holt, Rinehart, and Winston.