2000년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2000.7.17-20

슬라이딩 섹터를 이용한 비선형 시스템의 가변 구조 제어기의 설계

서호준 , 박장현 , 박귀태
고려대학교 전기공학과

Variable Structure Controller Design For The Nonlinear System Using Sliding Sector

Hojoon Seo , Janghyun Park , Gwitae Park
Dept. of Electrical Eng., Korea University

Abstract - In general, to reduce chattering in sliding mode control, a boundary layer around the sliding surface is used, and a continuous control is applied within the boundary. In this paper we propose the design method of sliding mode controller with sliding sector. To do this, the variable structure controller is designed for the linear system with uncertainty using sliding sector. The control law designed in the paper transfers the system state from outside to the inside of the sliding sector and ensures that some norm of the system state keeps decreasing.

1. 서 론

불확실성이 존재하는 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어기 설계시 불확실성이나 외란에 둔감한 특성을 갖기 위하여 발생하는 불연속 제어 입력은 전형적인 슬라이딩 모드제어기의 스위칭 논리로 인하여 Chattering 현상을 수반하게 되며, 이는 실제 산업용 기기가 그러한 고주파 특성에 빠르게 반응하지 못하거나 모델화 안된 동특성을 여기시키는 문제를 수반하게 된다. 이러한 Chattering 현상을 감소시키는 연구들은 스위칭 평면 근방에 경계층(Boundary layer)을 도입하거나 제어기 이득을 가변시키는 방법, 또는 연속 슬라이딩 모드 제어(CSMC : continuous sliding mode control)등 많은 연구 결과가 발표되었다. 그러한 연구 결과들 중에서, 슬라이딩 섹터를 이용한 가변 구조 제어기는 기존의 제어기법에서 발생 가능한 채터링 현상을 감소시키기 위하여 도입된 것으로써 슬라이딩 섹터 내부에서는 제어 입력을 인가하지 않더라도 상태벡터의 놈이 감소한다는 사실을 이용한 제어 기법이다. 이러한 슬라이딩 섹터를 이용한 제어기는 상태 변수가 슬라이딩 섹터 내부에 머무르도록 하는 제어 입력을 설계하여 상태 변수가 미리 선정한 슬라이딩 섹터에 머무르도록 한다. 본 논문에서는 이러한 슬라이딩 섹터를 이용하여 불확실성이 존재하는 선형 시스템에 대한 가변 구조 제어기를 설계한다.

2. PR-슬라이딩 섹터

가변 구조 제어기의 설계 목적은 계통의 상태 벡터들의 초기치 $x(t_0)$에 관계없이 상태값들을 미리 정해진 성질을 갖도록 선정된 슬라이딩 평면으로 이동시켜 계통의 동작을 슬라이딩 평면상에 제한시킴으로써 슬라이딩 평면이 갖는 최대 장점인 외란에 대한 강인성 및 차수 감소 효과를 얻는데 있다. 이러한 성질을 갖는 가변 구조 제어기는 일반적으로 다음의 두 단계에 의하여 설계된다.

- 원하는 특성을 갖는 슬라이딩 평면의 설계
- 계통의 상태 벡터들을 슬라이딩 평면상에 위치하도록 하는 제어 입력의 구성

본 논문에서는 기존의 가변 구조 제어기 설계 기법과는 다른 슬라이딩 섹터를 이용한 제어기 설계에 관한 연구를 수행한다. 먼저, 슬라이딩 섹터를 이용한 제어기 설계 기법에 대하여 기술한다.

식 (1)과 같이 표현되는 선형 단일 입력 계통을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R^1$는 각각 상태 벡터와 입력을 나타내며 , $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times 1}$이며 (A,B)는 가제어하다(controllable)고 가정한다.

정의 1 시스템 상태 벡터의 P-norm을 식 (2)와 같이 정의한다

$$\|x\|_p = (x^T P x)^{1/2} \quad , \quad x \in R^n \tag{2}$$

여기서, $P \in R^{n \times n}$ 는 양정칙대칭행렬(positive definite symmetric matrix)이다.

식 (2)와 같이 정의한 P-norm의 제곱은 식 (3)과 같이 표현되며, 이는 시스템의 Lyapunov 후보 함수가 된다.

$$L = \|x\|_p^2 = x^T P x > 0 \ , \ \forall x \in R^n \ , \ x \neq 0 \tag{3}$$

식 (1)과 같이 표현된 계통이 입력이 인가되지 않은 autonomous 시스템이 안정하면, 다음과 같은 양정칙대칭행렬 $R = C^T C$ 에 대하여 식(4)를 만족하는 positive symmetric 행렬 P 가 존재한다.

$$\dot{L} = x^T (A^T P + PA) x \le -x^T Rx \quad \forall x \in R^n \tag{4}$$

여기서, $P \in R^{n \times n}$, $R \in R^{n \times n}$, $C \in R^{l \times n}$, $l \ge 1$ 이며 (C,A)는 가관측하다.

식 (1)과 같이 표현되는 선형 시불변 계통이 불안정하면 식(4)는 성립하지 않는다. 이러한 경우 상태 공간을 식(4)의조건이 만족하는 공간과 그렇지 않은 공간으로 분리할 수 있다. 즉, 상태공간을 식 (2)와 같이 정의한 p-norm 이 감소하는 영역과 증가하는 영역으로 분리하여 다음과 같은 PR-sliding sector를 정의한다.

정의 2 PR-sliding sector

$$S = \{ x \mid x^T (A^T P + PA) x \le -x^T Rx \ , \ \forall x \in R^n \} \tag{5}$$

정리 1 식 (1)과 같이 표현되는 선형 시불변 계통에 입력이 인가되지 않는 경우, 식 (4)에서 정의한 PR-sliding sector는 어떠한 양정칙대각행렬 P 에 대하여 항상 존재하며, 정의 2에의하여 PR-sliding sector는 식 (6)과 같이 표현되어진다.

$$S = \{ x \mid s^2(x) \le \delta^2(x) \ , \ x \in R^n \} \tag{6}$$

여기서,

$$s^2(x) = x^T P_1 x \ge 0 \tag{7}$$

$$\delta^2(x) = x^T P_2 x \ge 0 \tag{8}$$

$P_1 \ P_2 \in R^{n \times n}$ 는 양정칙대각행렬이다.

증명)

Ω를 다음과 같이 정의한다.

$$\Omega = A^T P + PA + R \tag{9}$$

식 (9)에 정의한 Ω를 이용하면 식 (4)에서 정의한 PR-sliding sector 는 다음 식 (10)과 같이 나타내어진다.

$$x^T \Omega x \le 0 \tag{10}$$

행렬 Ω는 직교 행렬 $U \in R^{n \times n}$ 에 의하여 식 (11)가 같이 표현되어진다.

$$U^T \Omega U = diag(r_1, r_2, \ldots, r_n) \tag{11}$$

여기서, $r_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 는 Ω의 특성근이며 모두 실수이다.

다음과 같이 $\overline{P_1}$ 과 $\overline{P_2}$ 를 정의한다.

$$\overline{P_1} = diag(\frac{|r_1| + r_1}{2}, \frac{|r_2| + r_2}{2}, \ldots, \frac{|r_n| + r_n}{2})$$
$$\overline{P_2} = diag(\frac{|r_1| - r_1}{2}, \frac{|r_2| - r_2}{2}, \ldots, \frac{|r_n| - r_n}{2}) \tag{12}$$

즉, $\overline{P_1}$ 과 $\overline{P_2}$ 는 각각 Ω의 양의 고유치와 음의 고유치를 대각 요소로 갖는 대칭 행렬이다. 이러한, 가정으로부터 식 (13)의 관계를 얻는다.

$$U^T \Omega U = \overline{P_1} - \overline{P_2} \tag{13}$$

여기서, $\overline{P_i} \ge 0 \ (i = 1, 2)$이다.

$P_i = U\overline{P_i}U^T \ (P_i \ge 0, \ i = 1, 2)$ 의 관계식으로부터 식 (14)의 결과를 얻는다.

$$\Omega = P_1 - P_2 \tag{14}$$

앞서 정의한 식 (7)-(9)과 위의 결과로부터 PR-sliding sector가 존재함을 알 수 있다.

PR-sliding sector 의 P 행렬은 식 (15)의 Riccati 방정식의 해로부터 얻을 수 있다.

$$PA + A^T P - PBB^T P = -Q \tag{15}$$

여기서, $Q \in R^{n \times n}$ 는 양정칙대칭행렬이다.

식 (15)로부터 설계된 P 행렬을 이용하여 입력이 인가되지 않은 계통 (1)에 대한 Lyapunov 함수의 도함수는 식 (16)과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{L} &= x^T (A^T P + PA) x \le -x^T Rx \\ &= x^T PBB^T Px - x^T Qx \end{aligned} \tag{16}$$

식 (16)으로부터 PR-sliding sector는 다음과 같이 설계한다.

$$S = \{ x \mid |s(x)| \le |\delta(x)| \ , \ x \in R^n \} \tag{17}$$

여기서,

$$s(x) = Cx(t) \ , \quad C = B^T P$$

$$\delta(x) = \sqrt{x(t)^T rQx(t)} \ , \quad 0 < r < 1$$

3. 제어 입력 설계

식 (17)과 같이 설계된 PR-sliding sector로부터 불확실성이 존재하는 계통에 대한 가변 구조 제어 입력을 설계하는 절차는 다음과 같다.

먼저 같이 표현되는 선형 계통을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) + f(t) \tag{18}$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R^m$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$이고 ΔA는 계통 파라미터의 불확실성을, $f(t)$는 외란을 의미한다. 만일 ΔA와 $f(t)$에 다음과 같은 식 (19)의 관계를 만족하는 $\Delta \tilde{A}$와 $\tilde{f}(t)$가 존재하면 상태벡터와 외란은 정합 조건을 만족한다고 한다.

$$\Delta A = B \Delta \tilde{A}\ ,\ f(t) = B \Delta \tilde{f} \tag{19}$$

정합 조건을 나타내는 식 (19)는 모든 상태 벡터의 불확실성과 외란은 제어 입력을 경유하여 계통에 영향을 미치게 됨을 의미한다. 식 (18)가 정합 조건을 만족하면 다음과 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + Bu + BE$$
$$E = \Delta \tilde{A} x + \Delta \tilde{f} \tag{20}$$

식 (20)의 불확실성을 의미하는 함수가 다음과 같이 기지의 함수 ρ에 의하여 제한된다고 가정한다.

$$\| E \| \le \rho \tag{21}$$

이러한 가정으로부터 제어기는 다음과 같이 설계한다.

$$u(t) = (1 - \sigma(x))\, u_i(t) + \sigma(x) u_o(t) \tag{22}$$

여기서,

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & x(t) \in S_i \\ unchanged & x(t) \in S - S_i \\ 1 & x(t) \notin S \end{cases}$$

$$S_i = \{x|\ |s(x)| \le \alpha |\delta(x)|\}\ ,\ 0 < \alpha < 1$$

4장 결과

슬라이딩 섹터를 이용한 가변 구조 제어기는 기존의 제어기법에서 발생 가능한 채터링 현상을 감소시키기 위하여 도입된 것으로써 슬라이딩 섹터 내부에서는 제어 입력을 인가하지 않더라도 상태벡터의 놈이 감소한다는 사실을 이용한 제어 기법이다. 이러한 슬라이딩 섹터를 이용한 제어기는 상태 변수가 슬라이딩 섹터 내부에 머무르도록 하는 제어 입력을 설계하여 상태 변수가 미리 선정한 슬라이딩 섹터에 머무르도록 한다. 본 논문에서는 이러한 슬라이딩 섹터를 이용하여 불확실성이 존재하는 선형 시스템에 대한 가변 구조 제어기를 설계하였다.

[참 고 문 헌]

[1] Yaodong Pan and Katsuhisa Furuta, "VS controller of nonlinear system using sliding sector", Proceedings of 14th IFAC, pp25-30, 1999

[2] Katsuhisa Furuta and Yaodong Pan , "Variable structure control of continuous-time system with using sliding sector", Proceedings of 14th IFAC, pp439-444, 1999

[3] F. J Chang and H. J Liao and Shyang Chang, "Position control of dc motor via variable structure systems control : A chattering alleviation approach." IEEE Transaction on Industrial Electronics. vol 37 , no 6. pp. 452-459, Dec

[4] H.N.Al-Duwaish and Z.M.Al-Hamouz, "A Genetic approach to the selection of the variable structure controller feedback gains." IEEE international conference on control applications trieste, italy 1-4, pp 227-229, sep 1998

[5] G. Bartolini and A. Ferrara and Elio Usai, " On boundary layer dimension reduction in sliding mode control of SISo uncertain nonlinear system." IEEE international conference on control applications trieste, italy 1-4, pp 242-247, sep 1998

[6] Yuri B. Shtessel and James M. Bufflngton, "Continuous sliding mode control." American control confrence Philadelphia,Pennsylvania, pp 562-563, June 1998

[7] Fengxi Zhout and D. Grant Fisher, " Continous sliding mode control." Int. J. Control vol. 55. no 2, pp 313-327, 1992

[8] J.A.Burton and A.S.I Zinober, "Continous approximation of variable structure control." Int.J.System Sci. vol17. no 6, pp 875-885, 1986

[9] Pushikin Kachroo and Masayoshi Tomizuka, " Chattering reduction and Error convergence in the sliding-mode control of a class of nonlinear systems." IEEE transaction on automatic control. vol 41. no 7. pp 1063-1068 .july 1996