

가상의 상태를 이용한 새로운 슬라이딩 모드 제어기와 기존의 co-state 기반의 슬라이딩 모드제어기 비교·검토

박승규 하영석 곽균평
 창원대학교 전기공학과 제어 및 전력전자 연구실

Compartion of the Novel Sliding Mode Controller with Virtual State to Sliding Mode Controller with Co-states

Young-Suk Ha · Seung-Kyu Park · Ho-Kyun Ahn
 Changwon National University Control & Power Electronic Lab

Abstract - In this paper, the novel sliding mode control method with virtual state is compared to the SMC with co-states. The former method is shown to have advantage in the respect of computation.

1. 서 론

기존의 슬라이딩 모드제어는 강인 제어기법으로서 많은 연구결과와 실제 적용 예를 가지고 있지만 근본적으로 도달기간 문제와 입력 떨림현상을 가지고 있다 [1][2][3]. 이러한 문제들 외에 SMC(Sliding Mode Control)계통의 상태 제적은 제어되는 계통보다 낮은 차수를 가지는 슬라이딩 평면의 동특성에 의해서 결정되기 때문에 SMC의 다른 제어기법과 함께 결합되어 사용되어질 수 없는 특성을 가지고 있다. 이에 도달기간 문제를 없애고 슬라이딩 제적이 최적제어 제적을 따르도록 하는 방법이 제안되었으나 [4] 슬라이딩평면을 비선형함수로 나타내야하기 때문에 수식전개가 복잡하며 3차 이상의 계통에 대해서 그 결과를 확장하는 것이 어렵다. 이에 공칭계통의 상태제적을 따르도록 하고 도달기간 문제를 해결하기 위한 새로운 방법이 제시되었다 [5]. 이 연구에서 새로이 정의된 가상의 상태는 공칭계통의 가제어표준형을 기초로 구성되며 가상상태가 더해진 차수가 증가된 시스템을 구성하고 그 계통에 대해서 새로운 슬라이딩 평면을 제안한다. 이렇게 구성된 새로운 슬라이딩 평면은 다양한 형태의 제어기와 SMC가 결합된 제어기의 구성이 가능해 지도록 한다. 또한 가상 상태의 초기치를 스위칭함수의 초기값이 영이 되도록 결정하여 줌으로써 도달기간도 제거할 수 있다. 한편 Co-state 기반의 슬라이딩 모드 제어기는 불확실성을 가진 선형시스템에서 Co-state 계통의 특별한 시변 슬라이딩 평면을 제안하고 시변의 관점에서 초평면을 도입하여 파라미터 불확실성과 외란에 대해 강인한 Co-state 기반의 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였다. 본 논문에서는 Co-state 기반의 슬라이딩 모드제어기와 가상상태를 이용한 슬라이딩 모드제어기와 비교·검토 할 것이다.

2. 문제설정

아래와 같은 n차 시스템을 고려하기로 한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t) \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R$, $f \in R^r$ 이고 외란 행렬 D 는 다음의 정합조건을 만족한다.

$$rank\{B; D\} = rank B \quad (2)$$

기존의 슬라이딩 평면은 일반적으로 다음과 같은 형태로 표현될 수 있다. [6]

$$s(x) = c_n x_n + c_{(n-1)} x_{(n-1)} + \dots + c_1 x_1 + c_0 = 0 \quad (3)$$

여기서 c_0, c_1, \dots, c_n 은 슬라이딩 모드의 동특성이 안정하도록 주어진다. 슬라이딩 모드가 일어나도록 하는 조건은 다음과 같다 [1].

$$s(x) \dot{s}(x) < 0 \quad (4)$$

위의 조건은 $s(x, t)$ 에 의해서 정의되는 평면상에서 불연속이 일어나는 다음과 같은 제환입력 $u_1^+(\cdot), u_1^-(\cdot)$ 에 의해서 만족될 수 있다 [2].

$$u_1(\cdot) = \begin{cases} u_1^+(\cdot), & \text{for } s > 0 \\ u_1^-(\cdot), & \text{for } s < 0 \end{cases} \quad (5)$$

식(4)과 같은 형태의 슬라이딩 평면은 (n-1)차 동특성을 가지며 제어계통의 차수보다 낮은 차수를 가지기 때문에 여러 가지 형태의 제어기에 의해 제어되는 계통의 동특성을 가질 수 없으며 이것은 SMC가 다른 제어기법과 결합되어 사용될 수 없다는 것을 의미한다. 도달기간은 $s(x, t)$ 의 초기치가 영이 아닌 경우에 발생한다.

3. 기존의 co-state 기반의 슬라이딩 모드 제어기

외란과 불확실성을 가진 계통에서 슬라이딩 평면을 가진 가변구조제어는 강인성을 가진다. 시불변 플랜트는 다음과 같다

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu + Df, \quad x \in R^m, \quad f \in R^r \quad (6)$$

$$S = Cx = 0, \quad S \in R \quad (7)$$

co-state기반의 슬라이딩 평면은 아래로 같이 정의된다.

$$S = C(t)x = 0 \quad (8)$$

시변 계수행렬 $C(t)$ 는 (9)식으로부터 정의된다.

$$\dot{C} = -C(t)A + \Omega \quad (9)$$

본장에서는 외란이 없고 Ω 가 0인 경우를 설명하겠다

슬라이딩 모드의 동특성은 다음 방정식에 의해 지배된다.

$$\dot{x} = Ax + Bu_{eq} \quad (10)$$

$$\dot{s} = c(t) + c(t)Ax + c(t)Bu_{eq} = 0 \quad (11)$$

$$\dot{c} = -c(t)A \quad (12)$$

$$s = c(t)x = 0 \quad (13)$$

$C(t)B$ 는 비정칙행렬이라는 가정하에서
 · 동가제어입력 u_{eq} 는 존재하고
 · 슬라이딩모드 동특성 방정식은 비선형 슬라이딩 평면 (13)을 지닌 n차 시스템이다
 이 시스템의 특성은 아래의 정리에서 주어진다.

정리 1 시스템에서

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0 \quad (14)$$

$$\dot{c} = -c(t)A, \quad c(t_0) = c_0 \quad (15)$$

x_0 와 c_0 는 상수벡터이고 행렬이며 조건을 만족한다.

$$c_0 x_0 = 0 \quad (t_0 \geq t) \quad (16)$$

$$c(t)x(t) = c_0 x_0 \quad (17)$$

됨을 알 수 있다.

시변 슬라이딩 평면 $s = c(t)x = 0$ 의 동특성은, 슬라이딩 모드의 co-state를 사용하는 확장된 슬라이딩 모드를 제공한다. 선형 초평면에서 동작되는 것이 아니라 bilinear형에서 동작된다.

$$s_i = c_i^{T(i)} x(t) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (18)$$

이 방법의 또 다른 특징은 원래 계통의 동특성을 가지고 있다는 것이다. 슬라이딩 모드의 존재와 유일함에 필수적인 $C(t)B$ 의 rank 조건에 대한 설명을 위해서 다음 보조정리가 필요하다.

보조정리 $C(t)$ 는 다음식을 만족한다면 가정에서

$$\dot{C} = -CA, \quad C(t_0), \quad C \in R^{m \times n} \quad (19)$$

여기서 $rank(C_0 B) = m$ 와 pair(A,B)가 제어가능이다. 그러면 $rank(C(t)B) = m$ (all $t \geq t_0$)이다.

불안정한 플랜트에서는 점근적으로 안정한 $x(t)$ 슬라이딩 평면의 도입이 필요하다.

$$\dot{C} = -C(t)(\bar{A} - \bar{B}K), \quad C(t_0) = C_0 \quad (20)$$

$C_0 \bar{B}$ 는 역행렬이 존재하고 K는 Hurwitz에 의해 구할 수 있다. 슬라이딩 평면은 다음과 같이 정의된다.

$$S(C, X) = C(t)x(t) = 0 \quad (21)$$

다음 정리는 co-state가 포함된 슬라이딩 모드의 강인성의 정리이다.

정리 2.

(6)에 의해 주어진 플랜트에서 (\bar{A}, \bar{B}) 가 안정화가능하고 $C_0 \bar{B}$ 가 역행렬이 존재하고 $C_0 x_0 = 0, x_0 = x(t_0)$ 라고 가정하면 시스템 (6)과 (20)은 모든 $t \geq t_0$ 동안에 (20), (21)식을 만족하고 동특성은 다음 방정식에 의해 지배된다.

$$\dot{x} = (\bar{A} - \bar{B}K)x \quad (22)$$

$$\dot{C} = -C(t)(\bar{A} - \bar{B}K), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (23)$$

어떠한 외란과 파라미터 불확실성이 존재하지 않으면, 다음 선형제어기를 사용하면 된다.

$$u = -kx$$

도달기간을 제거하기 위해 Co-states 초기조건 $C_0 x_0 = 0, x_0 = x(t_0)$ 를 사용하였다.

앞에서 제기된 일반적인 슬라이딩 모드 제어기의 문제는 co-state의 도입과 동특성 방정식 (22), (23)에 의해 해결되지만 식(23)에서 시간변화계수 C(t)만큼 미분방정식이 늘어나서 계산량이 많아지고 복잡해지는 문제를 가지고 있다.

다음의 가상상태를 이용한 새로운 슬라이딩 모드 제어기는 co-state와 같이 기존의 슬라이딩 모드 동특성을 유지하면서 일반적인 슬라이딩 모드 제어기의 문제를 해결함과 동시에 매우 간단한 계산식을 가짐을 보일 것이다.

3. 가상상태를 이용한 새로운 슬라이딩 모드 제어기

본 장에서는 새로운 슬라이딩 평면을 제안하고 그것을 사용하여 SMC입력을 구하고자 한다. 이과정에 대한 블록전도를 살펴보면 그림 1과 같다.

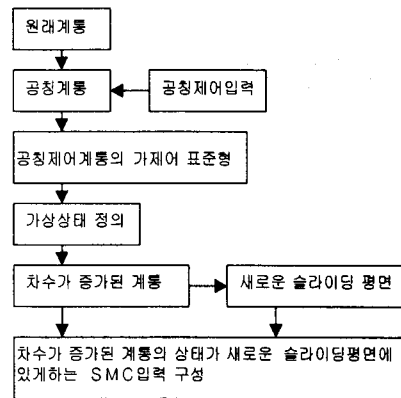


그림 1. 가상상태와 SMC입력을 구하는 과정

다음 식(1)과 같은 시스템에 대한 공칭 계통을 고려하자

$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t) + Bu_o(x_o, t) \quad (24)$$

여기서 $u_o(x_o, t)$ 는 미분가능한 공칭조정제어 입력이다.

새로운 가상상태를 정의하기 위하여 앞에서 언급했듯이 식(24)의 공칭계통을 다음과 같은 가제어표준형으로 변환한다.

$$\dot{z}_o(t) = A_c z_o(t) + B_c u_o(t) \quad (25)$$

여기서

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

z_o 의 n번째 상태 z_{on} 을 미분한 공칭 가상상태 z_{ov} 는 다음과 같이 표현될 수 있다. [7]

$$\dot{z}_{ov}(t) = -a_n z_{ov}(t) \dots - a_2 z_{o3}(t) - a_1 z_{o2}(t) + \dot{u}_o(x_o, t) \quad (26)$$

새로운 가상상태 z_v 는 식(26)에서 공칭 상태

$z_{o1}, z_{o2}, \dots, z_{on}$ 들을 비공칭 상태인 z_1, z_2, \dots, z_n 들로 대체함으로써 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{z}_v(t) = -\alpha_n z_v(t) \dots - a_2 z_3(t) - a_1 z_2(t) + \dot{u}_o(x, t) \quad (27)$$

여기서 $\dot{u}_o(x, t)$ 는 $u_o(x, t)$ 를 미분해서 얻으면 x 를 미분하게됨으로써 불확실성이 개입되기 때문에 반드시 $\dot{u}_o(x_o, t)$ 로부터 공칭상태인 x_o 를 원래상태인 x 로 대치함으로써 얻어야만 한다. 가상상태를 포함하는 차수가 증가된 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t) \quad (28)$$

$$\dot{z}_v(t) = -\alpha_n z_v(t) \cdots - \alpha_2 z_3(t) - \alpha_1 z_2(t) + \dot{u}_o(x, t)$$

여기서 $u(t)$ 는 슬라이딩 평면 위에서 슬라이딩 모드를 보장하는 SMC입력이다.
위의 차수가 증가된 계통에 대해 새로운 슬라이딩 평면을 다음과 같이 결정한다.

$$s_n = z_v(t_0) + \alpha_n z_n(t_0) \cdots + \alpha_1 z_1(t) - u_o(x(t_0), t_0) = 0 \quad (29)$$

가상 상태의 초기치를 다음과 같이 선택하면 s_n 의 초기치가 영이 되므로 도달기간이 제거된다.

$$z_v(t_0) = -\alpha_n z_n(t_0) \cdots - \alpha_1 z_1(t_0) + u_o(x(t_0), t_0) \quad (30)$$

여기서 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다. [5]

정리 1 : 계통 (28)의 상태가 제한된 슬라이딩 평면 (29)위에 존재할 때 계통 (1)의 상태는 공칭제어입력에 의해서 제어되는 공칭 계통(24)과 같은 동특성을 갖는다.

정리 1과 SMC이론으로부터 SMC 입력 $u(t)$ 가 슬라이딩 모드 평면 $s(z, z_v)$ 상에 상태들이 있도록 하면 상태 $x(t)$ 는 $u_o(x, t)$ 에 의해서 제어되는 공칭시스템의 궤적을 따른다는 것을 알 수 있다. 공칭 제어입력 $u_o(x, t)$ 는 어떠한 제어입력의 형태라도 가능하기 때문에 SMC가 다양한 형태의 제어기와 같이 사용되어질 수 있도록 한다.

계통 (28)의 상태들을 슬라이딩 평면으로 가도록 하기 위해서 다음조건을 만족하는 SMC입력이 구해져야 한다.

$$s_n(z, z_v) \dot{s}_n(z, z_v) < 0 \quad (31)$$

$\dot{s}_n(z, z_v)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{s}_n(z, z_v) = \dot{z}_v + C_0 P \dot{x} - \frac{\partial u_o(z, t)}{\partial z} P \dot{x} = -\alpha_n z_n - C_0 P x + C_2 P A x(t) + B u(t) + D f(t) \quad (32)$$

여기서

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}^T, \quad C_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}^T$$

$$C_2 = C_1 - \frac{\partial u_o(z, t)}{\partial z}$$

불확실성들의 크기가 제한되어 있기 때문에 다음 식을 만족하는 상수들 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} C_2 P A x(t) &< \beta_1 \|x(t)\| \\ C_2 P u(t) &< \beta_2 \|u(t)\| \\ C_2 P D f(t) &< \beta_3 \end{aligned} \quad (33)$$

그러므로 SMC입력은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -(C_2 P B)^{-1} \\ &(-\alpha_n z_n - C_0 P x + \dot{u}_o(x, t) + C_2 P A x(t) \\ &- (C_2 P B)^{-1} (\beta_1 \|x(t)\| + \beta_2 \|u(t)\| + \beta_3) \operatorname{sgn}(s_n)) \end{aligned} \quad (34)$$

가상상태를 도입하여 슬라이딩 평면을 구성함으로써 슬라이딩 모드가 공칭계통의 동특성을 가지도록하여 다양한 형태의 제어기와 SMC의 결합 형태의 제어기 구성을 가능하게 하고 도달기간을 제거하는 할 수 있음을 보였고 입력의 개수만큼 가상상태를 구해서 계산하면 되므로 이전의 co-state 기반의 슬라이딩 모드 제어기보다 계산이 간단하고 편리함을 알 수 있었다.

4. 결 론

본 논문에서는 가상의 상태를 이용한 새로운 슬라이딩 모드제어기와 기존의 Co-state 기반의 슬라이딩 모드제어기를 비교검토 하였다.

가상의 상태를 이용한 새로운 슬라이딩 모드제어기는 상태제적이 임의의 제어기로 제어되는 상태특성을 따르도록 함과 동시에 도달시간 문제를 해결하기 위하여 새로운 가상의 상태를 정의하여 새로운 슬라이딩 평면을 구성하고 이 슬라이딩 평면은 원래의 계통에 가상의 상태가 추가된 계통을 가반으로 하여 구성되어지며 원래 계통의 공칭 동특성을 가질 수 있게 됨으로써 슬라이딩 모드제어기를 다른 제어기법들과 연계하여 사용하는 것을 가능케 한다. 가상상태의 초기치를 슬라이딩 함수의 초기치가 영이 되도록 설정하여 줌으로써 도달기간을 제거하는 효과도 얻을 수 있다.

Co-state 기반의 슬라이딩 모드 제어기는 불확실성을 가진 선형시스템에서 Co-state 계통의 특별한 시변 슬라이딩 평면을 제안하고 시변의 관점에서 초평면을 도입하여 파라미터 불확실성과 외란에 대해 강인한 Co-state 기반의 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였다.

두 제어기는 원래의 상태공간의 동특성을 유지하고 있지만 Co-state 기반의 슬라이딩 모드제어기는 동특성을 안정화 하기 위한 식이 시간변화계수(C(t))만큼 미분방정식이 늘어나고 계산량이 증가하여 복잡해진다. 이에 반해 새로운 슬라이딩 모드제어기는 가제어 표준형만 구해서 계산하면 되므로 보다 간단하다.

참고문헌

- [1] J.Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, "Variable structure control : A survey," IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No.1, pp.2-22, 1993
- [2] V.I Utkin, Sliding modes and their application in variable structure systems, Moscow, Mir Publishers, 1978
- [3] U. Itkis, Control systems of variable structure, JOHNWILLY & SONS, New York, 1976
- [4] 김성태, 한종길, 임규만, 함운철, "비선형 스윙칭 평면을 이용한 슬라이딩모드 제어기 설계," 1997년도 대한전기학회 제어계측, 자동화, 로보틱스 연구회 합동 학술 발표회 논문집, pp.36-40, 3월 1997년
- [5] 박승규, 안호균, "가상의 상태를 이용한 새로운 슬라이딩 모드 제어기" 제어, 자동화, 시스템공학 논문지, Vol. 5 No. 5 pp.505-510, July, 1999
- [6] R.G. Roy, N. Olgac, "Robust nonlinear control via moving sliding surfaces- n-th order case," CDC'97, December 1997
- [7] V.I.Utkin, Sliding Modes in Control Optimization (Springer, Berlin 1992)
- [8] K.D. Young(ed), Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Applilications(Elsevier, Amsterdam, 1993)