

# 새로운 모델 추종 슬라이딩 모드 제어기

박승규, 옥인조, 안호균

창원대학교 전기공학과 제어및전력전자 연구실

## Novel Model Following Sliding Mode Controller with Virtual State

Seung-Kyu Park, In-Jo Ok, and Ho-kyun Ahn

control and power electronic lab., Changwon national univ.

Abstract - In this paper, a new model error following sliding mode control is considered with a novel sliding surface for the error. This novel sliding surface has nominal dynamics of an original state of the error system and makes it possible that the Sliding Mode Control(SMC) technique for the error of the model following is used with the various types of controllers. Its design is based on the augmented system whose dynamics have a higher order than that of the original error system. The reaching phase is removed by using an initial virtual state which makes the initial error state sliding function equal to zero.

### 1. 서론

슬라이딩 모드제어는 근본적으로 도달기간 문제와 입력 떨림현상을 가지고 있다[1][2][3]. 또한 SMC계통의 상태 궤적은 제어되는 계통보다 낮은 차수를 가지는 슬라이딩 평면의 동특성에 의해서 결정되므로 다른 제어기법과 결합될 수 없는 특성을 가지고 있다. 이에 도달기간문제를 없애고 슬라이딩 궤적이 최적제어 궤적을 따르도록 하는 방법이 제안되었으나[4] 수식전개 복잡하며 3차 이상의 계통에 대해서 그 결과를 확장하는 것이 어렵다. 이에 공칭계통의 상태궤적을 따르도록 하고 도달기간 문제를 해결하기 위한 새로운 방법이 제시되었다[7]. 이 연구에서 새로이 정의된 가상 상태는 공칭계통의 가제어표준형을 기초로 구성되며 가상상태의 차수가 더해진 증가된 시스템을 구성하고 그 계통에 대해서 새로운 슬라이딩 평면을 제안한다. 새로운 슬라이딩 평면은 다양한 형태의 제어기와 SMC가 결합된 제어기의 구성이 가능해 지도록 한다. 또한 가상 상태의 초기치를 스위칭함수의 초기값이 영으로 되도록 결정하여 도달기간이 제거된다. 그러나 기준입력이 존재하는 경우에는 적용이 불가능하므로 본 논문에서는 모델 추정기법을 이용하여 SMC가 결합된 형태의 제어기를 구성하여 주어진 목표치를 따라가는 강인한 최적제어기를 설계하기로 한다.

### 2. 본론

#### 2.1 문제 설정

아래와 같은 n차 시스템과 그 시스템의 모델 플랜트를 고려하기로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + Df(t) \\ x_m(t) &= Ax_m(t) + Br(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $u(t) = u_1(t) + r(t)$  이고, 오차 방정식은

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + Bu_1(t) + \Delta Ax(t) \\ &+ \Delta Bu_1(t) + \Delta Br(t) + Df(t) \end{aligned} \quad (2)$$

이다.

이제부터 식(2)에 대한 슬라이딩 평면을 결정하고 이를 만족하는 SMC입력을 구한다.

식(2)에서  $e \in R^n$ ,  $u_1 \in R$ ,  $f \in R^r$  이고 노음 유제를 가지는 불확실한 행렬  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ 와 외란 행렬  $D$ 는 다음의 정합조건을 만족한다.

$$\text{rank}[B; \Delta A; \Delta B; D] = \text{rank}B \quad (3)$$

기존의 슬라이딩 평면은 통상 다음과 같다.[5]

$$s(x) = c_n x_n + c_{(n-1)} x_{(n-1)} + \dots + c_1 x_1 + c_0 = 0 \quad (4)$$

슬라이딩 모드의 발생 조건은 다음과 같다[1].

$$s(e) \cdot \dot{s}(e) < 0 \quad (5)$$

위의 조건은  $s(e, t)$ 에 의해서 정의되는 평면상에서 불연속이 일어나는 다음과 같은 궤환입력  $u_1^+(\cdot)$ ,  $u_1^-(\cdot)$ 에 의해서 만족될 수 있다[2].

$$u_1(\cdot) = \begin{cases} u_1^+(\cdot), & \text{for } s > 0 \\ u_1^-(\cdot), & \text{for } s < 0 \end{cases} \quad (6)$$

식(4)과 같은 형태의 슬라이딩 평면은 (n-1)차 동특성을 가지기 때문에 여러 가지 형태의 제어기에 의해 제어되는 계통의 동특성을 가질 수 없다. 도달기간은  $s(e, t)$ 의 초기치가 영이 아닌 경우에 발생한다.

본 논문에서 해결할 문제는 다음과 같다.

- 오차 상태에 대한 가상 상태를 도입하여 슬라이딩 모드가 오차 공칭계통의 동특성을 가지도록 하여 다양한 형태의 모델추종제어기와 SMC가 결합된 제어기 구성을 가능케 한다.
- 도달기간을 제거하는 것이다.

#### 2.2 새로운 슬라이딩 평면을 가지는 SMC

본 장에서는 새로운 오차상태 슬라이딩 평면을 제안하고 그것을 사용하여 SMC입력을 구하고자 한다.

다음 식(2)와 같은 시스템에 대한 공칭계통을 고려하자.

$$\dot{e}_o(t) = Ae_o(t) + Bu_{1o}(e_o, t) \quad (7)$$

$u_{1o}(e_o, t)$ 는 미분가능한 공칭 조정제어 입력이다.

새로운 가상상태를 정의하기 위하여 식(7)의 공칭계통을 상태변환  $z(t) = Pe(t)$ 를 이용하여 다음과 같은 가제어표준형으로 변환한다.

$$\dot{z}_o(t) = A_c z_o(t) + B_c u_{1o}(t) \quad (8)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$z_o$ 의  $n$ 번째 상태  $z_{on}$ 을 미분한 공칭 가상상태  $z_{ov}$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다. [7]

$$\dot{z}_{ov}(t) = -\alpha_n z_{ov}(t) \cdots - \alpha_2 z_{o3}(t) - \alpha_1 z_{o2}(t) + \dot{u}_{1o}(e_o, t) \quad (9)$$

새로운 가상상태  $z_v$ 는 식(9)에서 공칭 상태  $z_{o1}, z_{o2}, \dots, z_{on}$ 들을 비공칭 상태인  $z_1, z_2, \dots, z_n$ 들로 대체함으로써 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{z}_v(t) = -\alpha_n z_v(t) \cdots - \alpha_2 z_3(t) - \alpha_1 z_2(t) + \dot{u}_{1o}(e, t) \quad (10)$$

여기서  $\dot{u}_{1o}(e, t)$ 는  $u_{1o}(e, t)$ 를 미분해서 얻으면  $e$ 를 미분하게 됨으로써 불확실성이 개입되기 때문에 반드시  $\dot{u}_{1o}(e_o, t)$ 로부터 오차 공칭상태인  $e_o$ 를 원래상태인  $e$ 로 대체함으로써 얻어야만 한다. 위의 차수가 증가된 오차의 계통에 대한 새로운 슬라이딩 평면을 다음과 같이 결정한다.

$$s_n = z_v(t) + \alpha_n z_n(t) \cdots + \alpha_1 z_1(t) - u_{1o}(e, t) = 0 \quad (11)$$

오차 가상상태의 초기치를 다음과 같이 선택하면  $s_n$ 의 초기치가 영이 되므로 도달시간이 제거된다.

$$z_v(t_0) = -\alpha_n z_n(t_0) \cdots - \alpha_1 z_1(t_0) + u_o(e(t_0), t_0) \quad (12)$$

계통 (11)의 상태들을 슬라이딩 평면으로 가도록 하기 위해서 다음조건을 만족하는 SMC입력이 구해져야 한다.

$$s_n(z, z_v) \dot{s}_n(z, z_v) < 0 \quad (13)$$

$\dot{s}_n(z, z_v)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \dot{s}_n(z, z_n) &= \dot{z}_v + C_1 P \dot{e} - \frac{\partial u_{1o}(z, t)}{\partial z} P \dot{e} \\ &= -\alpha_n z_n - C_0 P e + C_2 P((A + \Delta A)e(t) + (B + \Delta B)u_1(t) + Df(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}^T, C_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}^T, C_2 = C_1 - \frac{\partial u_{1o}(z, t)}{\partial z}$$

불확실성들의 크기가 제한되어 있기 때문에 다음 식을 만족하는 상수들  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} C_2 P \Delta A e(t) &< \beta_1 \|e(t)\| \\ C_2 P \Delta B u_1(t) &< \beta_2 |u_1(t)|, C_2 P D f(t) < \beta_3 \end{aligned} \quad (15)$$

그러므로 SMC입력은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -((C_2 P B)^{-1}(-\alpha_n z_n - C_0 P e + \dot{u}_{1o}(e, t) + C_2 P A e(t)) - (C_2 P B)^{-1}(\beta_1 \|e(t)\| + \beta_2 |u_1(t)| + \beta_3) \text{sgn}(s_n)) \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.3 새로운 슬라이딩 모드 평면을 이용한 강인한 최적제어

본 논문에서 제안된 새로운 슬라이딩 평면에서 오차 공칭제어입력  $u_{1o}(e, t)$ 를 최적제어입력으로 설계하면 강인한 최적제어기를 설계할 수 있다. 식 (2)과 같은  $n$ 차 계통을 고려한다. 오차의 공칭계통

(7)에 대한 평가함수는 다음과 같이 주어진다.

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (e_o^T Q e_o + r u_{o1}^2) dt \quad (17)$$

이 평가함수를 최소화시키는 최적의 제어입력은 다음과 같다 [5]

$$u_{1o}(e_o) = -\frac{1}{r} B^T S e_o(t) = -K e_o(t) \quad (18)$$

여기서  $S$ 는 아래의 리카티방정식의 해이다.

$$-SA - A^T S - Q + \frac{1}{r} S B^T B S = 0 \quad (19)$$

위의 최적제어입력을 가지는 오차의 공칭계통  $\dot{u}_{1o}(e_o)$ 의 값은 다음과 같이 계산되어진다.

$$\begin{aligned} \dot{u}_{10} &= K(Ae + B \dot{u}_{10}^*) \\ &= K(Ae - BKe) = Le \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $L = -K(A - BK)$

식(10)에 의해 오차 가상상태  $z_v$ 는 다음과 같다.

$$\dot{z}_v(t) = -\alpha_1 z_2(t) \cdots - \alpha_{n-1} z_n(t) + Le(t) \quad (21)$$

차수가 증가된 계통은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{z}_v(t) = -\alpha_1 z_2(t) \cdots - \alpha_n z_n(t) + Le(t) \quad (22)$$

위의 계통에 대한 새로운 슬라이딩 평면은 다음과 같다.

$$s_n = z_v + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \cdots \alpha_n z_n + Ke = 0 \quad (23)$$

$\dot{s}_n$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{z}_v(t) + C_1 P \dot{e}(t) + K \dot{e}(t) \\ &= -\alpha_n z_n(t) - C_0 P e(t) + Le(t) \\ &\quad + (C_1 P + K)((A + \Delta A)e(t) + (B + \Delta B)u_1(t) + Df(t)) \end{aligned} \quad (24)$$

불확실성의 크기가 제한되어 있기 때문에 다음 식을 만족하는 상수들  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned} (C_1 P + K) \Delta A e(t) &< \gamma_1 \|e(t)\| \\ (C_1 P + K) \Delta B u_1(t) &< \gamma_2 |u_1(t)| \\ (C_1 P + K) D f(t) &< \gamma_3 \end{aligned} \quad (25)$$

SMC입력을 다음과 같이 구성하면  $s_n \dot{s}_n < 0$ 을 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -((C_1 P + K B)^{-1}(-\alpha_n z_n - C_0 P e + Le + (C_1 P + K) A e(t)) - ((C_1 P + K B)^{-1}(\gamma_1 \|e(t)\| + \gamma_2 |u_1(t)| + \gamma_3) \text{sgn}(s_n))) \end{aligned} \quad (26)$$

결과적으로 원계통 (1)식에 대한 SMC입력  $u(t)$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} u(t) &= -((C_1 P + K B)^{-1}(-\alpha_n z_n - C_0 P e + Le + (C_1 P + K) A e(t)) - ((C_1 P + K B)^{-1}(\gamma_1 \|e(t)\| + \gamma_2 |u_1(t)| + \gamma_3) \text{sgn}(s_n)) + r(t)) \end{aligned} \quad (27)$$

### 2.4 예제 및 시뮬레이션 결과

아래와 같은 3차 계통과 계통을 고려하자.

$$\dot{x}_1(t) = (-1 + \Delta a_1)x_1(t) + u(t) + f(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \Delta a_1 x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) + f(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \Delta a_1 x_1(t) - 3x_3(t) + u(t) + f(t)$$

여기서  $u(t) = u_1(t) + r(t)$ ,  $|\Delta a_1| < 3$ ,  $f(t) < 0.5$ 이다.

시뮬레이션상에서  $\Delta a_1, f(t), r(t)$ 는 각각 2.5와 0.4와 1로 두었다. 상태의 초기치는  $x_1(0)=5, x_2(0)=3.5, x_3(0)=2, x_{m1}(0)=2, x_{m2}(0)=1.5, x_{m3}(0)=1$ 이다.

위의 오차 시스템의 평가함수는 아래와 같다.

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (e_o^T \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e_o + u_{oi}^2) dt$$

최적 상태이득은 다음과 같다.

$$K = [2.2671 \ 0.1381 \ 0.1034]$$

가제어표준형으로의 변환행렬은 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

SMC제어기 구성에 필요한 계산들은 다음과 같다.

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}^T, \quad C_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_1 P + K = [2.7671 \ -7.8619 \ 13.6034],$$

$$(C_1 P + K)B = 8.5086,$$

$$L = -K(A - BK) = [7.9544 \ 0.6224 \ 0.5697],$$

$$(C_1 P + K)\Delta A e(t) < 25.5258 |e_1| (\gamma_1 = 25.5258)$$

$$(C_1 P + K)Df(t) < 4.2543 = \gamma_3$$

가상상태  $z_v$ 의 동특성은 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{z}_v(t) = [5.4544 \ 32.6224 \ -39.9303] e(t) - 6z_v(t)$$

가상상태의 초기치는 다음과 같이 결정된다.

$$z_v(0) = -[2.7671 \ -7.8619 \ 13.6034] e(0) = -6.1812$$

슬라이딩 평면은 다음과 같이 결정된다.

$$s_n = z_v(t) + [2.7671 \ -7.8619 \ 13.6034] e(t)$$

SMC 입력은 식(34)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$u(t) = -0.1175(-6z_v(t) + [2.6873 \ 48.3463 \ -80.7406] e(t) + [22.2715|x_1| + 4.2543] \text{sgn}(s_n))$$

아래 그림들은 위의 예의 시뮬레이션 결과이다.

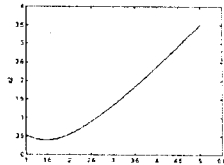


그림 1. 새로운 슬라이딩평면을 사용한 경우의  $x_1, x_2$  평면에서의 상계적

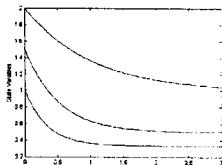


그림 2. 불확실성이 없는 경우  $x_1, x_2, x_3$ 의 최적제어

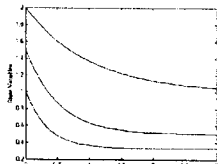


그림 3. 불확실성이 존재하고 새로운 SMC를 사용한 경우의  $x_1, x_2, x_3$ 의 제어

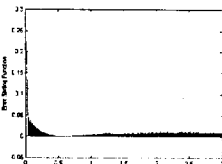


그림 4. 불확실성이 존재하고 최적제어기 사용한 경우의  $e_1, e_2, e_3$ 의 제어

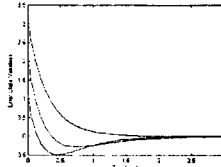


그림 5. 불확실성이 존재하고 새로운 SMC를 사용한 경우의  $e_1, e_2, e_3$ 의 제어

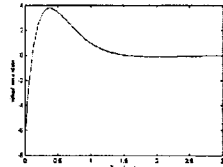


그림 6. 가상상태  $z_v$ 의 제어

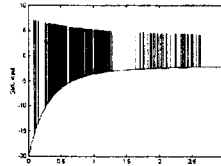


그림 7. SMC 입력  $u(t)$

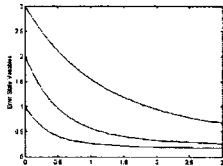


그림 8. 슬라이딩 함수  $s_n(e, e_v)$ 의 값

### 3. 결론

본 논문에서는 오차의 상태에 대한 슬라이딩 모드 평면의 새로운 설계방법이 제시되었다. 새로운 SMC계통의 오차상태는 공칭계통의 동특성을 가지게 된다. 어떤 타입의 제어기이든 미분 가능하면 공칭제어기가 될 수 있다. 본 논문에서는 최적제어기를 공칭제어기로 사용함으로써 파라미터 불확실성이 존재하는 계통에 대해서도 오차가 공칭계통의 최적제어를 따라 가며 주어진 목표치에 수렴할 수 있는 강인한 최적 제어기를 설계하였으며, 가상상태의 초기치를 적절하게 선택함으로써 오차 상태의 도달시간을 쉽게 제거할 수 있었다. 본 논문은 여러 형태의 제어기를 SMC와 결합하여 사용할 수 있도록 강인한 모델추정 SMC를 가능하도록 하였는데 큰 의의가 있다.

### (참고 문헌)

- [1] J.Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, "Variable structure control: A survey," IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No.1 pp.2-22, 1993
- [2] V.I Utkin, Sliding modes and their application in variable structure systems, Moscow, Mir Publishers, 1978
- [3] U. Itkis, Control systems of variable structure, JOHNWILLY & SONS, New York, 1976
- [4] 김성태, 한종길, 임규만, 함운철, "비선형 스윙칭 평면을 이용한 슬라이딩모드 제어기 설계," 1997년도 대한전기학회 제어계측, 자동화, 로보틱스 연구회 합동 학술 발표 논문집, pp.36-40, 3월 1997년
- [5] R.G. Roy, N. Olgac, "Robust nonlinear control via moving sliding surfaces- n-th order case," CDC'97, December 1997
- [6] D.E. Kirk, Optimal control theory, Prentice-Hall, 1970
- [7] 박승규, 안호균, "가상의 상태를 이용한 새로운 슬라이딩 모드 제어기" 제어, 자동화, 시스템공학 논문지, Vol. 5 No. 5 pp.505-510, July, 1999