EBPOM을 이용한 비선형계의 시변 파라미터 추정

안두수°, 김태훈°, 김진태°, 한상욱°, 이 승*, 임윤식**
° : 성균관 대학교, * : 대림 대학, ** : 여주 대학

Identification of the Distributed Parameter Systems via Orthogonal Function

Du-su Ahn°, Tai-hoon Kim°, Jin-tae Kim°, Sang-uk Han°, Seung Lee*, Yun-sik Im**
° : Sung kyun kwan Univ., * : Daelim Univ., ** : Yeojoo Univ.

Abstract - This paper considers the problem of identifying the time-varying parameters of the bilinear systems. The Parameters, in this paper, are identified by using the EBPOMs (Extended Block Pulse Operational Matrices) which can reduce the burden of operation and the volume of error caused by matrices multiplication

1. 서 론

연속시간 시스템들의 미분방정식 모델에 나타나는 입출력 신호들의 시간 미분치에 대한 직접측정을 피하기 위하여 다양한 직교함수들과 직교 다항식들이 제안되었다.[1-4].
연속시간 입출력 신호들을 근사화된 급수로 전개하고 적분 연산행렬을 적용하면 선형 대수방정식 집합들을 얻을 수 있고 그 미분 방정식들의 파라미터들을 추정할 수 있다. 이러한 기법들을 사용하여 연속시간 모델식별에 관한 만족스런 결과들을 얻을 수 있다. 시스템 공학(System Science)에 대한 직교함수들의 적용은 Corrington에 의해 제안되었다[5]. Corrington은 상미분 방정식을 풀기위해 월쉬연산행렬들을 구성하였는데, 후에 Chen과 Hsiao[6-7]가 그중 하나를 월쉬연산행렬로 채택한 것이 일반화되어 사용되었다. 그 후 만일 적분연산행렬이 월쉬영역으로부터 블럭펄스영역으로 전환된다면 계산상의 복잡함이 현저히 줄어든다는 것이 밝혀졌다[8-9]. 또한 선형 시변인 경우에 편리한 확장된 블럭펄스적분연산행렬(EBPOMs)[10]로 $P_{i,j}$ (i, j = 0, 1, 2, …)가 유도되었고, 유도된 행렬 $P_{i,j}$를 사용함으로써 다중 적분 연산인 경우 연산이 간단해지고 정확성이 향상될 수 있다는 것이 밝혀졌다[11].
본 논문에서는 확장된 블럭펄스 적분연산행렬을 적용하여 쌍일차계의 시변 파라미터들을 추정하였다.

2. 본 론

2.1 확장된 블럭 펄스 연산 행렬

다음과 같이 시변 요소를 갖는 형태로 주어진 적분을 고려해본다[11].

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i\text{번}} t^j f(t)\,dt \cdots dt$$

(단, $i, j = 0, 1, 2, \cdots$) (1)

이러한 형태를 갖는 적분들의 블럭 펄스 급수 전개는 선형 시변 시스템들의 문제를 풀 때 유용하다. 사실 이런 형태는 $r(t)=t_j$로 하여 CBPOM $\boldsymbol{P}$를 사용하여

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i\text{번}} t^j f(t)\,dt \cdots dt \doteq \boldsymbol{E}^T \boldsymbol{D}_f \boldsymbol{D}_r \boldsymbol{P}^i \boldsymbol{\Psi}_{(m)}(t) \quad \text{(i)}$$

로 풀 수 있으며, 또는 GBPOMs를 써서

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i\text{번}} t^j f(t)\,dt \cdots dt \doteq \boldsymbol{E}^T \boldsymbol{D}_f \boldsymbol{D}_r \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{\Psi}_{(m)}(t) \quad \text{(ii)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{단, } \boldsymbol{E}=[1\ 1\ \cdots\ 1]^T,\ \ \boldsymbol{f}^T=[f_1\ f_2\ \cdots\ f_m], \\ \boldsymbol{r}^T=[r_1\ r_2\ \cdots\ r_m],\ \ \boldsymbol{D}_f=diag(f_1\ f_2\ \cdots\ f_m), \\ \boldsymbol{D}_r=diag(r_1\ r_2\ \cdots\ r_m) \end{array} \right)$$

로 풀 수 있다. 그러나 위 두 식에서는 함수들의 곱과 적분이 분리되어 블럭 펄스 급수로 근사화 된다. 이러한 불리 계산으로 인하여 계산량이 많아지고 더 많은 계산상의 오차가 발생하게 된다. 이런 단점을 피하기 위해서, 식(1)을 한 단계만에 블럭펄스 급수로 전개할 수 있다. 먼저 식(1)에서, $f(t)=\phi_k(t)$인 특별한 경우를 생각해 본다.

$$\int_0^t \cdots \int_0^t t^j \phi_k(t))\,dt \cdots dt \tag{2}$$

여기서, k = 1, 2, 3, …, m이다. 블럭펄스함수는 지연을 갖는 단위 계단함수로 표현할 수 있으므로 다음처럼 나타낼 수 있다. (단, $h=\dfrac{T}{m}$)

$$\begin{aligned} t^j\phi_k(t) &= t^j u(t-(k-1)h) - t^j u(t-kh) \\ &= \{(t-(k-1)h)+(k-1)h\}^j u(t-(k-1)h) \\ &\quad -((t-kh)+kh)^j u(t-kh) \end{aligned} \tag{3}$$

앞의 식(3)에 이항정리(binomial theorem)를 적용하면 식(4)에서

$$\begin{aligned} t^j\phi_k(t) = &\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}((k-1)h)^{j-q}(t-(k-1)h)^q u(t-(k-1)h) \\ &-\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(kh)^{j-q}(t-kh)^q u(t-kh) \end{aligned} \tag{4}$$

이 되고, 다시 이 식에 라플라스 변환을 행하면

$$\begin{aligned} L\{t^j\phi_k(t)\} = &\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}((k-1)h)^{j-q}\frac{q!}{s^{q+1}}\exp\{-(k-1)hs\} \\ &-\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(kh)^{j-q}\frac{q!}{s^{q-1}}\exp\{-khs\} \end{aligned} \tag{5}$$

과 같이 된다. 위식은 라플라스 변환의 적분 특성에 의하여

$$\begin{aligned} &L\left\{\int_0^t \cdots \int_0^t t^j \phi_k(t)\,dt \cdots dt\right\} \\ &= \sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}((k-1)h)^{j-q}\frac{!}{s^{i+q+1}}\exp\{-(k-1)hs\} \\ &\quad -\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(kh)^{j-q}\frac{!}{s^{i+q+1}}\exp\{-khs\} \end{aligned} \tag{6}$$

와 같이 표현될 수 있다. 식(6)에 다시 라플라스 역변환을 행하면

$$\begin{aligned} &\int_0^t \cdots \int_0^t t^j \phi_k(t)\,dt \cdots dt \\ &= \sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}((k-1)h)^{j-q}\frac{q!}{(i+q)!}(t-(k-1)h)^{i+q}u(t-(k-1)h) \\ &\quad -\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(kh)^{j-q}\frac{q!}{(i+q)!}(t-kh)^{i-q}u(t-kh) \\ &= [c_{i,j,k,1}\ \ c_{i,j,k,2}\ \ \cdots\ \ c_{i,j,k,m}]^T\Psi_{(m)}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

으로 나타낼 수 있다.
이때, 행렬이 원소 $c_{i,j,k,l}$($l=1,2,\cdots,m$)은 다음 식으

로부터 계산할 수 있다.

$$c_{i,j,k,l} = \frac{1}{h}\int_0^l \cdots \int_0^l t^j \psi_k(t)\, dt \cdots dt \quad ((l-1)h \le t \le lh)$$

$$= \begin{cases} 0, & l < k \\ h^{i+j}\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}\frac{q!}{(i+q+1)!}(k-1)^{j-q}, & l = k \\ h^{i+j}\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}\frac{q!}{(i+q+1)!}\{(k-1)^{j-q}[(l-k+1)^{i+q+1} \\ \quad -(l-k)^{i+q+1}] - k^{j-q}[(l-k)^{j+q+1}-(l-k-1)^{j+q+1}]\}, & l > k \end{cases} \tag{8}$$

식 (7)을 이용하여, m개의 블럭펄스 함수적분의 블럭펄스 그 수를 다음처럼 하나의 행렬 $\boldsymbol{P}_{j,k}$로 표현할 수 있다.

$$\int_0^l \cdots \int_0^l t^j \psi_k(t)\, dt \cdots dt \doteq \boldsymbol{P}_{i,j}\boldsymbol{\Psi}_{(m)}(t) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{P}_{i,j} = \frac{j!\,h^{i+j}}{(i+j+1)!}\begin{pmatrix} p_{i,j,1,1} & p_{i,j,1,2} & p_{i,j,1,3} & \cdots & p_{i,j,1,m} \\ 0 & p_{i,j,2,2} & p_{i,j,2,3} & \cdots & p_{i,j,2,m} \\ 0 & 0 & p_{i,j,3,3} & \cdots & p_{i,j,3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{i,j,m,m} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$p_{i,j,k,l} = \begin{cases} 0, & l < k \\ \sum_{q=0}^{j}\frac{(i+j+1)!}{(j-q)!(i+q+1)!}(k-1)^{j-q}, & l = k \\ \sum_{q=0}^{j}\frac{(i+j+1)!}{(j-q)!(i+q+1)!}(k-1)^{j-q}[(l-k+1)^{i+q+1} \\ \quad -(l-k)^{i+q+1}] - k^{j-q}[(l-k)^{j+q+1} \\ \qquad -(l-k-1)^{j+q+1}]\}, & l > k \end{cases}$$

식(10)의 행렬 $\boldsymbol{P}_{i,j}$는 피적분항에 t^j항을 가진 함수의 i번 적분과 관련된 블럭펄스 적분 연산행렬, 즉 t^j와 관련된 i번째 확장된 적분연산행렬로 정의된다. 행렬 $\boldsymbol{P}_{i,j}$로부터 GBPOMs[10]로 표현되는 행렬 $\boldsymbol{P}_i$는 $\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_{i,0}$ $(i=1,2,\cdots)$가 되어 $\boldsymbol{P}_{i,j}$의 특수한 경우라는 것을 알 있다. 또한, CBPOM은 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{1,0}$가 됨을 알 수 있다.

지금까지의 결과로부터 식(1)의 블럭펄스 급수전개는 다음 식처럼 한단계로 얻어질 수 있음을 알 수 있다.

$$\int_0^l \cdots \int_0^l t^j f(t)\, dt \cdots dt \doteq \boldsymbol{f}^T\, \boldsymbol{P}_{i,j}\boldsymbol{\Psi}_{(m)}(t) \tag{iii}$$

앞의 식 (i), (ii) 그리고 (iii)으로부터 EBPOMs을 썼을때의 장점을 다음처럼 요약할 수 있다.

[장점 1] 시변 요소인 t를 따로 계산하지 않아도 되므로 연산량이 감소하게 된다. (식 (i), (ii)와 식 (iii)의 비교로 알 수 있다.)

[장점 2] 다중 적분을 행할 때 연산 행렬의 곱을 피할 수 있게 되므로 오차의 누적을 줄일 수 있다.

2.2 2차원 블럭펄스함수

2차원 블럭펄스함수 $\psi_{i,j}(z,t)$는 구간 $t=[0,T)$와 $z=[0,Z)$에서 다음처럼 정의된다.

$$\psi_{i,j}(z,t) = \psi_i(t)\psi_j(z) = \begin{cases} 1, & (i-1)T/m \le t < iT/m \\ & (j-1)Z/m \le z < jZ/m \\ 0 & \text{그외구간} \end{cases} \tag{11}$$

(단, $i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$)

구간 $t=[0,T)$와 $z=[0,Z)$에서 적분 가능한 임의의 함수 $f(z,t)$에 대하여

$$f(z,t) \cong \sum_i{}=1^m \sum_{j=1}^{n} f_{i,j}\psi_{i,j}(z,t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}\psi_i(t)\psi_j(z) = \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\, \boldsymbol{f}\, \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{(m)}(t) = [\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \psi_m(t)\ ]^T \tag{13-1}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) = [\psi_1(z) \quad \psi_2(z) \quad \psi_n(z)\ ]^T \tag{13-2}$$

이고 여기서 $\boldsymbol{f}$는 함수 $f(z,t)$의 2차원 BPF계수 행렬이며, 다음의 식(14)과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{f} = [f_{i,j}]_{m\times n} \tag{14}$$

$$f_{i,j} = \frac{TZ}{mn}\int_{(j-1)Z/n}^{jZ/n}\int_{(i-1)T/m}^{iT/m} f(z,t)\,dt,dz$$
$$\cong \frac{TZ}{mn}\{f[(i-1)T/m,(j-1)Z/n] + f[iT/m,(j-1)Z/n] + f[(i-1)T/m, jZ/n] + f[iT/m, jZ/n]\}$$

2.3 비선형 분포정수계의 파라미터 추정

다음의 2차 편미분 방정식으로 표현되는 비선형 시불변 분포정수계를 고려한다[13].

$$a_6\frac{\partial^2 y^{p_6}(z,t)}{\partial z^2} + a_5\frac{\partial^2 y^{p_5}(z,t)}{\partial z\partial t} + a_4\frac{\partial^2 y^{p_4}(z,t)}{\partial t^2} + a_3\frac{\partial y^{p_3}(z,t)}{\partial z} + a_2\frac{\partial y^{p_2}(z,t)}{\partial t} + a_1 y^{p_1}(z,t) = u^{p_7}(z,t) \tag{15}$$

(단, $p_i(i=1,2,\cdots,7)$은 정수이고, $a_i(i=1,2,\cdots,6)$은 미지의 파리미터)

이때 측정가능한 입출력 신호와, 이미 알고있는 초기값과 경계 조건으로부터 미지의 파리미터를 추정할 수 있다. 식 (15)의 양변을 각각 t와 z에 대하여 두 번 적분하면 다음의 식(16)을 얻을 수가 있게 된다.

$$\begin{aligned} & a_6\int_0^t\int_0^t y^{p_6}(z,t)\,dtdt + a_5\int_0^z\int_0^t y^{p_5}(z,t)\,dtdz + a_4\int_0^z\int_0^z y^{p_4}(z,t)\,dzdz \\ & + a_3\int_0^z\int_0^t\int_0^t y^{p_3}(z,t)\,dtdtdz + a_2\int_0^z\int_0^z\int_0^t y^{p_2}(z,t)\,dtdzdz \\ & + a_1\int_0^z\int_0^z\int_0^t\int_0^t y^{p_1}(z,t)\,dtdtdzdz + \int_0^z\int_0^z\int_0^t e(z)\,dtdzdz \\ & + \int_0^z\int_0^t\int_0^t f(t)\,dtdtdz + \int_0^z\int_0^z\int_0^t g(z)\,dtdzdz \\ & - a_6\int_0^t\int_0^t y^{p_6}(0,t)\,dtdt - a_5\int_0^z\int_0^t y^{p_5}(0,t)\,dtdz - a_4\int_0^z\int_0^z y^{p_4}(z,0)\,dzdz \\ & = \int_0^z\int_0^z\int_0^t\int_0^t u^{p_1}(z,t)\,dtdtdzdz \end{aligned} \tag{16}$$

$$e(z) = -a_4\left[\frac{\partial y^{p_4}(z,t)}{\partial z}\right]_{t=0} - a_2 y^{p_2}(z,0)$$
$$f(t) = -a_6\left[\frac{\partial y^{p_6}(z,t)}{\partial z}\right]_{z=0} - a_3 y^{p_3}(0,t)$$
$$g(z) = -a_5\left[\frac{\partial y^{p_5}(z,t)}{\partial z}\right]_{t=0}$$

식 (16)의 각 함수들을 2차원 블럭펄스 급수전개하면 다음의 식(17)부터 식(24)까지에서 보듯

$$y(z,t) \cong \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}{}^T(z) \quad (\text{단, } \boldsymbol{Y} = [y_{i,j}]_{m\times n}) \tag{17}$$

$$u(z,t) \cong \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\ \boldsymbol{U}\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}{}^T(z) \quad (\text{단, } \boldsymbol{U} = [u_{i,j}]_{m\times n}) \tag{18}$$

$$e(z) \cong \sum_{j=1}^{n} e_j\psi_j(z) = \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\sum_{j=1}^{n} e_j\, \boldsymbol{E}_{\cdot j}\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) \tag{19}$$

$$f(t) \cong \sum_{j=1}^{m} f_j\psi_j(z) = \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\sum_{j=1}^{m} f_i\, \boldsymbol{E}_{i\cdot}\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) \tag{20}$$

$$g(z) \cong \sum_{j=1}^{n} g_j\psi_j(z) = \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\sum_{j=1}^{n} g_j\, \boldsymbol{E}_{\cdot j}\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) \tag{21}$$

$$y^{p_6}(0,t) \cong \sum_{j=1}^{m} h_i\psi_i(z) = \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\sum_{j=1}^{m} h_i\, \boldsymbol{E}_{i\cdot}\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) \tag{22}$$

$$y^{p_5}(0,t) \cong \sum_{j=1}^{m} r_i\psi_i(z) = \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\sum_{j=1}^{m} r_j\, \boldsymbol{E}_{i\cdot}\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) \tag{23}$$

$$y^{p_4}(z,0) \cong \sum_{j=1}^{n} s_j\psi_j(z) = \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\sum_{j=1}^{n} s_j\, \boldsymbol{E}_{\cdot j}\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) \tag{24}$$

(단, $\boldsymbol{E}_{\cdot j}$와 $\boldsymbol{E}_{i\cdot}$은 $m\times n$ 행렬이고, 각각 j번째 행과 i번째 열의 원소들만 1이고 나머지는 0인 행렬)

과 같이 된다. 또, 다음의 식(25)와 식(26)의 관계가 성립하므로 식 (17)부터 식 (26)까지를 식 (16)에 대입하여 정리하면 다음의 식(27)을 얻을 수가 있다.

$$y^{p_k}(z,t) \cong \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\ \boldsymbol{L}_k\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z), \quad k=1,2,\cdots,6 \tag{25}$$

(단, $\boldsymbol{L}_k = [l_{kij}]_{m\times n},\ l_{kij} = y_{ij}^{p_k}$)

$$u^{p_7}(z,t) \cong \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)\ \boldsymbol{L}_7\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z) \tag{26}$$

(단, $\boldsymbol{L}_7 = [l_{7ij}]_{m\times n},\ l_{7ij} = y_{ij}^{p_7}$)

$$\boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)(\ \boldsymbol{P}_{(m),2,0})^T \boldsymbol{L}_7(\ \boldsymbol{P}_{(n)2,0})\ \boldsymbol{\Psi}_{(n)}(z)$$
$$= \boldsymbol{\Psi}_{(m)}{}^T(t)[a_6(\ \boldsymbol{P}_{(m),2,0})^T \boldsymbol{L}_6 + a_5(\ \boldsymbol{P}_{(m),1,0})^T \boldsymbol{L}_6(\ \boldsymbol{P}_{(n),1,0})$$
$$+ a_4\ \boldsymbol{L}_4(\ \boldsymbol{P}_{(n),2,0}) + a_3(\ \boldsymbol{P}_{(m),2,0})^T \boldsymbol{L}_3(\ \boldsymbol{P}_{(n),1,0})$$

$$+a_2(P_{(n),1,0})^T L_2(P_{(n),2,0})+a_1(P_{(m),2,0})^T L_1(P_{(n),2,0})$$
$$+(P_{(m),1,0})^T \sum_{j=1}^{n} e_j E_{\cdot j}(P_{(n),2,0})$$
$$+(P_{(m),2,0})^T \sum_{i=1}^{m} f_i E_{i\cdot}(P_{(n),1,0})$$
$$+(P_{(m),1,0})^T \sum_{j=1}^{n} e_j E_{\cdot j}(P_{(n),2,0})$$
$$-a_6(P_{(m),2,0})^T \sum_{i=1}^{n} h_i E_{i\cdot}$$
$$-a_5(P_{(m),1,0})^T \sum_{i=1}^{m} r_i E_{i\cdot}(P_{(n),1,0})$$
$$-a_4 \sum_{j=1}^{n} s_j E_{\cdot j}(P_{(n),2,0})\Big] \Psi_{(n)}(z) \tag{27}$$

식 (27)을 간단하게 쓰면 다음식과 같다.

$$D_u = a_6 D_6 + a_5 D_5 + a_4 D_4 + a_3 D_3 + a_2 D_2 + a_1 D_1$$
$$+\sum_{j=1}^{n} e_j D_{ej} + \sum_{i=1}^{m} f_i D_{fi} + \sum_{j=1}^{n} g_j D_{gj} + \sum_{i=1}^{m} \hat{h}_i D_{hi}$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \hat{r}_i D_{ri} + \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_j D_{sj} \tag{28}$$

(단,

$D_6 = (P_{(m),2,0})^T L_6 = [\, d_{61} \;\vdots\; d_{62} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{6m} \,]$

$D_5 = (P_{(m),1,0})^T L_5 (P_{(n),1,0}) = [\, d_{51} \;\vdots\; d_{52} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{5m} \,]$

$D_4 = L_4 (P_{(n),2,0}) = [\, d_{41} \;\vdots\; d_{42} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{4m} \,]$

$D_3 = (P_{(m),2,0})^T L_3 (P_{(n),1,0}) = [\, d_{31} \;\vdots\; d_{32} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{3m} \,]$

$D_2 = (P_{(m),1,0})^T L_2 (P_{(n),2,0}) = [\, d_{11} \;\vdots\; d_{12} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{1m} \,]$

$D_1 = (P_{(m),2,0})^T L_1 (P_{(n),2,0}) = [\, d_{11} \;\vdots\; d_{12} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{1m} \,]$

$D_{ej} = (P_{(m),1,0})^T E_{\cdot j} (P_{(n),2,0}) = [\, d_{ej1} \;\vdots\; d_{ej2} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{ejm} \,]$

$D_{fi} = (P_{(m),2,0})^T E_{i\cdot} (P_{(n),1,0}) = [\, d_{fi1} \;\vdots\; d_{fi2} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{fim} \,]$

$D_{gj} = (P_{(m),1,0})^T E_{\cdot j} (P_{(n),2,0}) = [\, d_{gj1} \;\vdots\; d_{gj2} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{gjm} \,]$

$D_{hi} = (P_{(m),2,0})^T E_{i\cdot} = [\, d_{hi1} \;\vdots\; d_{hi2} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{him} \,]$

$D_{ri} = (P_{(m),1,0})^T E_{\cdot i} (P_{(n),1,0}) = [\, d_{ri1} \;\vdots\; d_{ri2} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{rim} \,]$

$D_{sj} = E_{\cdot j} (P_{(n),2,0}) = [\, d_{sj1} \;\vdots\; d_{sj2} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{sjm} \,]$

$D_u = (P_{(m),2,0})^T L_7 (P_{(n),2,0}) = [\, d_{u1} \;\vdots\; d_{u2} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{um} \,]$

$\hat{h}_i = -a_6 h_i,\quad \hat{r}_i = -a_5 r_i,\quad \hat{s}_j = -a_4 s_j$

$i = 1, 2, \cdots, m,\quad j = 1, 2, \cdots, n$)

식 (28)은 다시 다음 식(29)처럼 쓸 수 있다.

$$\Gamma = H\,\theta \tag{29}$$

$H=$

$$\begin{bmatrix} d_{61} & \cdots & d_{11} & d_{e11} & \cdots & d_{en1} & d_{f11} & \cdots & d_{fm1} & d_{g11} & \cdots & d_{gn1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{62} & \cdots & d_{12} & d_{e12} & \cdots & d_{en2} & d_{f12} & \cdots & d_{fm2} & d_{g12} & \cdots & d_{gn2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} d_{h11} & \cdots & d_{hm1} & d_{r11} & \cdots & d_{rm1} & d_{s11} & \cdots & d_{sn1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{h1m} & \cdots & d_{hm2} & d_{r1m} & \cdots & d_{rmm} & d_{s1m} & \cdots & d_{snm} \end{bmatrix}$$

$$\theta = [\, a_6 \cdots a_1\; e_1 \cdots e_n\; f_1 \cdots f_m\; g_1 \cdots g_n\; \hat{h}_1 \cdots \hat{h}_m\; \hat{r}_1 \cdots \hat{r}_m\; \hat{s}_1 \cdots \hat{s}_n \,]^T$$

$$\Gamma = [\, d_{u1}{}^T \;\vdots\; d_{u2}{}^T \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; d_{um}{}^T \,]$$

식 (29)로부터 θ는 다음 식으로 구할 수 있다[12].

$$\theta = (H^T H)^{-1} H^T \Gamma \tag{30}$$

2.4 시뮬레이션

다음의 식 (31)로 주어지는 비선형 분포 정수계에 대하여

$$a\frac{\partial^2 y^2(z,t)}{\partial z^2} = u^2(z,t) \tag{31}$$

초기값은 $y(z,0)=0$, 그리고 경계 조건들은 $y(0,t)=0$, $y(1,t)=t$ 라 가정한다. 식(31)의 양변을 z에 대하여 두 번 적분하면

$$a y^2(z,t) = \int_0^z \int_0^z u^2(z,t)\,dz dz \tag{32}$$

과 같이 표현할 수 있고 , 식(17), 식(18) 그리고 식(25)를 이용하여 식(28)의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$D_u = a\,D \tag{33}$$

(단, $D_u = U(P_{(n),2,0})$, $D = Y$이고 U와 Y는 각각 $u(z,t)$와 $y(z,t)$의 블럭펄스 급수벡터)

파라미터 (a)의 값을 식(33)에 의하여 구하면 다음의 표 1과 같다.

T	Z	m	n	$\hat{a}$
1	1	4	4	17.2155
		8	8	14.3976
		16	16	13.1584
		32	32	12.5704
참 값 a				12

표 1. 파라미터들의 추정값

Table 1 Identified value of parameters

3. 결 론

분포정수계의 파라미터를 추정하는 경우에, 기존의 직교함수 적분연산 행렬을 사용하게 되면 적분이 거듭될수록 적분연산 행렬의 오차가 누적되어 가는 단점이 있었다. 이를 해결하기 위하여 본 논문은 분포정수계의 파라미터를 추정하는데 확장된 블럭펄스 적분연산행렬의 특성을 최초로 적용하였고, 그결과 누적 오차가 감소함을 알 수 있었다. 또한, 파라미터의 추정과정에서 블럭펄스함수의 비결합특성을 간접적으로 보였다. 확장된 블럭펄스 적분연산행렬의 특성은 다중입출력(MIMO)시스템이나 시간 지연을 포함하는 시스템의 파라미터 추정에도 유용할 것으로 생각된다.

[참 고 문 헌]

[1] K. R. Palisamy, "System Identification via Block Pulse Functions", Int. J. Systems Sci. Vol. 10, pp. 1493, 1981.

[2] G. P. Rao, "System Identification via Walsh Functions", Pro. IEE., Vol. 122, pp. 1160, 1975

[3] P. R. Clement, "Laguerre Functions in System Analysis and Parameter Identification", J. Fran. Inst., Vol. 133, pp. 85, 1982

[4] Paraskevopoulds, :Legendre Series Approach to Identification and Analysis of Linear Systems", IEEE. Trans. Auto. Cont., Vol. 30, pp. 585, 1985

[5] N. S. Corrington, "solution of Differential and Integral Equations with Functions", IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-20, No. 5, pp. 470, 1973

[6] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-20, pp. 596, 1975

[7] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "A State Space Approach to Walsh Series Solution of Linear Systems", Int. J. Systems Sci., Vol. 6, pp. 833, 1975

[8] C. F. Chen, Y. T. Tsay and T. T. Wu, "Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and Their Application to Distributed Systems", J. Fanklin Inst., Vol. 303, pp. 267, 1977

[9] C. Hwang and T. Y. Guo, "Identification of Lumped Linear Time-varying Systems via Block Pulse Functions", Int. J. Systems Sci., Vol. 15, pp. 361, 1984

[10] C. H. Wang, "Generalized Block Pulse Operational Matrices and Their Applications to Operational Calculus", Int. J. Control, Vol. 36, No. 1, pp. 67 1982

[11] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, "Block-pulse Functional and Their Applications in Control Systems", Springer-Verlag, 1992

[12] G. Strang, "Linear Algebra and Its Applications", 2nd ed., Academic Press, pp. 103, 1980

[13] N. S. Hsu, "Identification of Non-linear Distributed Systems via Block-pulse Functions", Int. J. Control, Vol. 36, No. 2, pp. 281, 1982

[14] M. S. P. Sinha, V. S. Rajamani and A. K. Sinha, "Identification of Non-linear Distributed Systems Using Walsh Functions", Int. J. Control, Vol. 32, No. 4, pp. 669, 1980