

아라고 원판 시스템의 상태공간 모델 식별

강 호균*, 최 수영**, 최 군호***, 박 기현**
 *LG 이노텍 생산기술연구소, **성균관 대학교, ***(주)한미 기술연구소

State-Space Model Identification of Arago's Disk System

Hokyun Kang*, Sooyoung Choi**, Goonho Choi***, Kiheon Park**.
 *LG Innotek Engineering Technical Center, **Sung-Kyun-Kwan Univ, ***HAN-MI co.LTD.

Abstract - In many cases the systems are so complex that it is not possible to obtain reasonable models using physical insight. Also a model based on physical insight contains a number of unknown parameters even if the structure is derived from physical laws. These problems can be solved by system identification.

In this paper, Arago's disk system which has both stable and unstable regions is selected as an example for identification and a state-space model is identified using tailor-made model structure of this system. In stable region, a state-space model of Arago's disk system is identified through open loop experiment and a state-space model of unstable region is identified through closed loop experiment after using fuzzy controller to stabilize unstable system.

전체 시스템은 직류 전동기를 포함한 원판의 회전 부분(직류 전동기부 모델)과 이 원판의 회전에 의한 자속의 변화로 발생하는 힘에 의해 나타나는 각도의 변화 부분(아라고 원판부 모델)으로 크게 나눌 수 있고, 전체 시스템의 모델링은 이들 두 부분을 각각 따로 모델링한 후 최종적으로 이들 두 부분을 결합함으로써 구할 수 있다. 상세한 유도는 참고문헌[1]를 참조하고, 여기서는 하나의 동작점에서 선형화된 상태 방정식의 결과만 인용한다[4].

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 \cos x_{10} & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & k_5 \\ 0 & 0 & k_6 & k_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_8 \end{bmatrix} \Delta u \quad (1)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

1. 서 론

시스템을 모델링하는 경우 수학적으로 표현하기 어려운 특성을 가진 시스템이 존재할 수 있고, 자속밀도와 같이 정확하게 구하기 힘든 시스템 상수가 존재할 수 있다. 이런 경우 시스템 식별법을 이용하여 시스템을 모델링할 수 있다. 본 논문에서는 안정적인 영역과 불안정한 영역을 모두 가지고 있는 아라고 원판 시스템(Arago's Disk System)[1]을 식별대상으로 선정하여 두 영역에 대하여 시스템 식별법을 적용하고 그 결과를 서로 비교하고자 한다.

2. 본 론

2.1 아라고 원판 시스템

아라고 원판 시스템은 유도 전동기의 동작원리를 응용하여 제작한 것이다. 이 시스템은 직류 전동기를 이용하여 원판을 회전시켜 자속의 변화를 일으키고, 이 자속의 변화는 자석 막대에 힘을 가하게 된다. 그리고 이 힘으로부터 발생하는 자석 막대의 회전 토크를 막대의 무게로 지지시켜 일정한 각을 유지하게 한다. 이 각은 포텐쇼미터에 의해 측정되며, 측정된 값을 이용하여 막대의 각을 원하는 상태로 만들 수 있다. 그림 1은 실제 제작된 아라고 원판 시스템을 간략하게 나타낸 것이다.

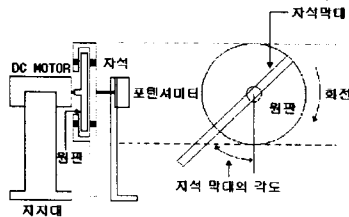


그림 1 아라고 원판의 전체 시스템도

2.2 시스템 식별

시스템 식별은 미지의 시스템에서 관측된 입/출력 자료를 가지고 그와 동일한 동작을 할 수 있는 수학적 모델을 결정하는 것으로 식별 절차는 그림 2와 같다.

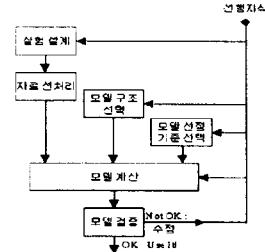


그림 2 시스템 식별 루프

2.2.1 모델 구조 선택

본 논문에서는 기본적인 물리법칙들이나 파라미터로 만들어지고 물리적인 의미를 가진 시스템 파라미터의 미지값을 표현하는 Tailor-made 모델을 사용한다.

Tailor-made 모델은 식 (1)과 (2)의 상태공간 방정식에서 상태공간 행렬에 미지의 파라미터를 추정하도록 하면 되고, 또한 실제 우리가 수집한 입/출력 자료에는 측정잡음이나 외란에 대한 영향이 있을 수 있기 때문에 잡음 모델을 더하면 된다.

$$\Delta \dot{x} = A(\theta) \Delta x + B(\theta) \Delta u + K(\theta) \epsilon(t) \quad (3)$$

$$y = C \Delta x + \epsilon(t)$$

여기서 $K = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4]$ 이다. 식 (3)은 칼만 예측기[2]라 하고, ϵ 은 예측 오차 그리고 K 는 정상상태 칼만이다. 본 논문에서 실제 추정하는 파라미터 벡터는 $\theta = [k_1 \cos x_{10} \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6 \ k_7 \ k_8 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4]$ 이다.

2.2.2 실험 설계

성공적인 시스템 식별을 하기 위해서는 수집하는 자료 가 시스템에 대한 충분한 정보를 가지도록 실험을 설계 해야한다.

(가) 식별에 필요한 입력 신호 설계

본 논문에서는 아라고 원판 시스템 식별의 입력신호로 일반적으로 선형 시스템 식별에 많이 사용하는 PRBS(Pseudo Random Binary Signal) 신호를 사용하였다. PRBS 신호는 백색잡음과 유사한 특성을 가지고 있으며, 다소 주기가 긴 deterministic 신호이다.

(나) 개루프 식별과 폐루프 식별

기본적으로 시스템 식별은 입력과 출력이 서로 독립인 개루프 실험으로 얻은 자료를 이용하여 식별을 한다. 그러나 시스템이 불안정하거나, 생산성, 경제성 또는 안정성을 이유로 제한 제어가 필요 할 때가 있다. 이때는 폐루프 식별을 이용하여 식별을 한다. 본 논문에서 사용하는 아라고 원판 시스템은 안정한 영역과 불안정한 영역을 모두 가지고 있다. 그래서 안정한 영역에서는 그림 3 과 같이 개루프 실험을 통해 입/출력 자료를 얻고, 불안정한 영역에서는 그림 4와 같이 폐루프 실험을 통해 입/출력 자료를 얻는다. 그림 4에서 피지제어기는 불안정한 시스템을 안정화 시키기 위해서 사용하였고, 또한 피지 제어기는 모델링이 필요없으므로 사용하였다.

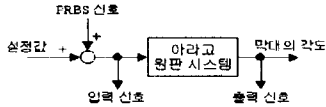


그림 3 개루프 실험 블록 선도

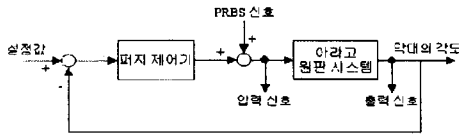


그림 4 폐루프 실험 블록 선도

(다) 샘플링 구간의 선택

식별에 사용되는 입/출력 자료를 얻기 위해서는 샘플링 구간을 선택해야 한다. 샘플링 구간을 선택하는 최고의 방법은 보통 시스템 대역폭의 약 10배의 샘플링 주파수를 선택한다. 이것은 시스템 계단 응답에 대한 상승 시간(rise time)에서 5~8개의 샘플링을 하는 것과 대략적으로 일치한다[3].

2.2.3 자료 선처리

자료 선처리가 필요한 이유는 좋은 자료를 선택해서 모델 선정과 모델 검증에 좋은 결과를 얻도록 하는데 있다. 그래서 식별을 적용하는데 있어 처음으로 해야 하는 것은 자료를 그래프로 그려보고 자료에 오류가 없는지 확인하는 것이다. 왜냐하면 신호 레벨이 저주파 외란에 의해 변하거나, 시스템 동역학의 주된 주파수 구간 이상의 고주파 외란이 존재할 수도 있기 때문이다.

2.2.4 식별 방법의 선택

시스템 식별 방법에는 PEM 방법, 상관관계 접근법, 상태공간 모델에 대한 subspace 방법등이 있다. 본 논문에서는 일반적인 모델 구조에 적용할 수 있고, 실제 시스템이 모델 구조 내에 포함되어 있으면 정확한 모델을 구할 수 있는 PEM 방법을 사용하였고, 다음과 같이 간단한 식으로 표시할 수 있다.

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} V_N(\theta) \quad (4)$$

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t, \theta)$$

여기서 $\epsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t | \theta)$ 이다.

2.2.5 모델 계산

많은 모델 구조에서 대해서 식 (4)에서 함수 $V_N(\theta)$ 는 θ 의 다소 복잡한 함수이고, 그 때 값 $\hat{\theta}_N$ 을 최소화하는 문제는 최소화를 위한 수치적 탐색 알고리즘에 의해서 계산된다. 본 논문에서는 다음과 같은 식을 이용한다.

$$\hat{\theta}^{(i+1)} = \hat{\theta}^{(i)} - \mu^{(i)} [V_N'(\hat{\theta}^{(i)})]^{-1} V_N'(\hat{\theta}^{(i)}) \quad (5)$$

2.2.6 모델 검증

검증은 모델에 대한 어떤 목적을 말하는 것이기 때문에 문제에 따라 평가하는 방법은 다르다. 그러나 공통적인 특성은 그림 5와 같이 같은 입력으로 동작시켰을 때 모델의 시뮬레이션 출력과 시스템의 실제 출력을 비교하는 것이고, 그 차이는 작아야 한다.

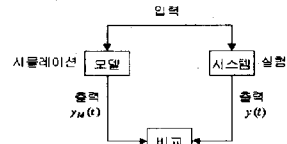


그림 5 검증 테스트

일반적으로 모델을 검증하는 데는 많은 방법이 있지만 본 논문에서는 나머지 해석(residual analysis) 방법[3]을 사용한다.

2.2.7 식별을 위한 프로그램 패키지

시스템 식별을 위해 앞에서 설명한 많은 내용 중, 특히 모델을 계산하고 그것의 특성을 평가하는 데는 프로그램의 도움이 필요하며 실제 상업적으로 이용 가능한 많은 프로그램이 존재한다. 본 논문에서는 가장 많이 사용되는 패키지 중의 하나인 MathWorks 사의 SITB(System Identification Toolbox)를 이용하여 아라고 원판 시스템을 식별한다.

2.3 실험장치 구성

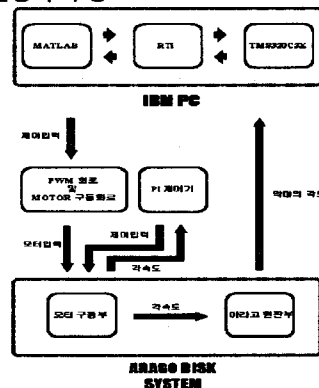


그림 6 전체 시스템 구성도

아라고 원판 시스템은 그림 6과 같이 구성되어 있다. 시스템은 전체적으로 아크릴로 제작되어 있으며 직류 전동기와 직축으로 알루미늄 원판을 연결하여 회전할 수 있도록 하였고, 4개의 자석과 추가 부착된 막대는 자유롭게 회전할 수 있도록 하였다.

시스템 식별을 위해서 아라고 원판 시스템의 입력과 출력인 막대의 각도가 필요하다. 출력값을 얻기 위해서 포토센서미터로 측정된 아라고 원판 시스템의 각도를 DSP 내부에 있는 A/D 컨버터를 이용하여 DSP의 메모리에 저장시키고, dSPACE TRACE 모듈을 이용해 DSP의 메모리에 기록된 값을 실시간으로 보조 기억장치에 기록한다. 마찬가지로 입력값도 dSPACE TRACE 모듈을 이용해 보조 기억장치에 기록한다.

2.4 실험 및 결과

2.4.1 샘플링 구간의 선택 및 입력 신호

식별에 필요한 샘플링 간격은 아라고 원판 시스템의 계단 응답을 이용해서 결정한다. 그림 7은 아라고 원판 시스템에 1[V]의 계단 입력을 넣을 때 출력을 보여주고 있다.

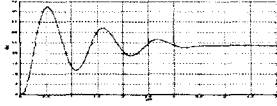


그림 7 1[V]의 계단입력에 대한 계단응답

위 그림에서 시스템의 상승 시간은 대략 0.3초이다. 그래서 상승 시간에서 5개의 자료를 얻을 수 있게 샘플링 간격을 정하면 0.06초이다. 따라서 샘플링 간격은 $T=0.06$ 초이다.

식별에 대한 입력신호는 PRBS 신호를 사용하였다. 이 신호는 Matlab을 이용해서 만들어지고, DSP를 통하여 아라고 원판 시스템의 입력으로 들어간다. PRBS 신호의 상한과 하한 레벨은 실험을 통하여 선형 구간을 벗어나지 않게 ± 0.2 [V]로 결정하였고, 샘플링 자료의 수는 1023개이다.

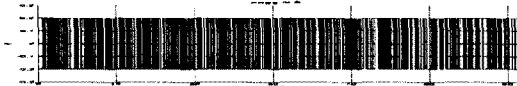


그림 8 식별에 사용되는 PRBS 신호

2.4.2 입/출력 자료 수집 및 선처리

입/출력 자료를 얻기 위한 실험은 61.32초 동안 실행되었고, 샘플링 구간 동안 입력은 일정하게 유지시켜 주었다. 입/출력 자료는 dSPACE TRACE 모듈을 이용해서 얻고, 그 때의 단위는 입력은 전압[V]이고 출력은 막대의 각도[rad]이다.

(가) 안정한 영역(45°)에서의 입/출력 자료

그림 9는 안정한 영역에서의 실제 입/출력 신호를 그 래프로 나타낸 것이다.

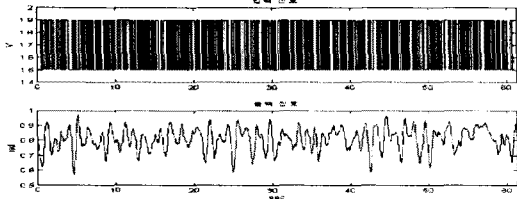


그림 9 개루프 실험에서 수집한 입/출력 자료

(나) 불안정한 영역(120°)에서의 입/출력 자료

그림 10은 불안정한 영역에서의 실제 입/출력 신호를 그 래프로 나타낸 것이다.

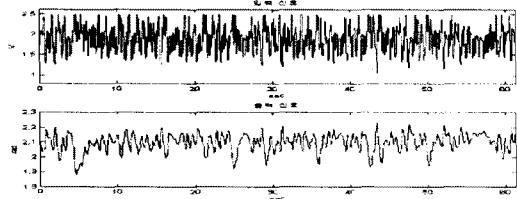


그림 10 페루프 실험에서 수집한 입/출력 자료

2.4.3 결과

앞에서 식별에 필요한 입/출력 자료를 이용해서 식(3)에 있는 미지의 파라미터를 포함한 행렬 $A(\theta)$, $B(\theta)$ 를 안정한 영역에서와 불안정한 영역에서 각각 식

별한 결과는 아래와 같다.

• 안정한 영역에서 아라고 원판 시스템의 추정 모델

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.55e01 & -1.60e00 & 1.21e01 & 0 \\ 0 & 0 & -1.06e02 & 3.82e02 \\ 0 & 0 & -1.36e08 & -6.66e02 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.36e08 \end{bmatrix}$$

• 불안정한 영역에서 아라고 원판 시스템의 추정 모델

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5.67e00 & -3.04e00 & 6.35e00 & 0 \\ 0 & 0 & -1.06e02 & 3.82e02 \\ 0 & 0 & -1.54e08 & -6.66e02 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.52e08 \end{bmatrix}$$

위에서 구한 안정한 영역의 개루프 실험과 불안정한 영역의 페루프 실험에서 추정한 모델을 검증하기 위해서 시뮬레이션 출력과 실제 측정된 출력을 각각 그림 11과 그림 12에 나타내었다. 이 그림에서 개루프 모델은 상당히 잘 추정되었다는 것을 알 수 있지만, 페루프 모델은 추정결과가 좋지 못하다.

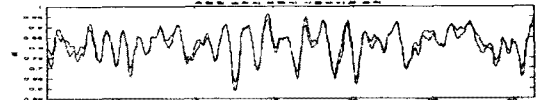


그림 11 안정한 영역에서 실제 출력과 시뮬레이션 출력

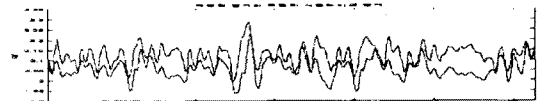


그림 12 불안정한 영역에서 실제 출력과 시뮬레이션 출력

3. 결 론

본 논문에서는 안정한 영역과 불안정한 영역을 모두 가지고 있는 아라고 원판 시스템을 식별대상으로 선정하고, 이 시스템의 Tailor-made 모델구조를 구해서 상태공간 모델을 식별해 보았다. 안정한 영역에서는 개루프 실험을 통해 아라고 원판 시스템의 상태공간 모델을 식별해 보았고, 불안정한 영역에서는 시스템의 모델을 필요로 하지 않는 퍼지 제어를 이용하여 먼저 불안정한 시스템을 안정하게 만든 후 페루프 실험을 통하여 아라고 원판 시스템의 상태공간 모델을 식별하였다. 앞의 실험 결과에서 알 수 있듯이 개루프 실험을 이용한 식별은 상당히 좋은 결과를 나타내었지만, 페루프 실험은 좋은 결과를 얻지 못하였다. 그 이유는 기본적으로 식별 이론이 입력과 출력이 서로 독립이라는 가정하에 전개되기 때문에 개루프 실험에서는 좋은 결과를 얻었지만, 페루프 실험은 시스템의 출력이 입력으로 재환되어 입력과 출력이 서로 상관관계를 가지게 되므로 좋은 결과를 얻지 못하였다.

(참 고 문 헌)

- [1] 최균호, "아라고 원판 시스템의 자세 제어에 관한 연구", 성균관대학교 공학 석사 학위 논문, 1994.
- [2] Lennart Ljung, "Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems", IEEE Transaction on Automatic Control, 1970.
- [3] Lennart Ljung and Torkel Glad, Modeling of Dynamic System, Prentice Hall, 1994.
- [4] 강호근, "아라고 원판 시스템의 상태공간 식별에 관한 연구", 성균관대학교 공학 석사 학위 논문, 1999.