

Runge-Kutta 신경망을 이용한 비선형 시스템의 제어

°이시일*, 김동희*, 김성식*, 이영석**, 서보혁*
*경북대학교 대학원 전기공학과, **영진전문대 전기계열

Nonlinear System control Using the Runge-Kutta Neural Network

°Si-II Lee*, Dong-Hee Kim*, Sung-Sik Kim*, Young-Seog Lee**, Bo-Hyeok Seo*
Dept. of Electrical Eng. Kyungpook Nat. Univ.*, Dept. of Electrical Eng. Yeungjin Junior College**

Abstract - This paper presents the Runge-Kutta neural networks(RKNN's) using the Runge-Kutta approximation method and the orthogonal function for control of unknown dynamical systems described by ordinary differential equations in high accuracy. These subnetworks of RKNN's are based on orthogonal function. Computer simulations show the usefulness of the proposed scheme.

1. 서 론

신경망은 동적 시스템(dynamical systems)을 식별하고 제어하는데 널리 쓰인다[1]-[3]. 이때, 시스템은 일반적으로 이산시간(discrete time), 혹은 상차분 방정식(ordinary difference equation)으로 나타내는 일차 이산 시스템(first-order discretized system)을 고려한다. 그러나, 이러한 일반적인 기존의 신경망으로 상미분 방정식(ordinary differential equation)으로 표현되는 동적 시스템의 상태를 장기예측하는데 있어서 문제가 있다. 첫 번째로서, 시스템의 상태의 변화율 대신에 시스템 상태를 학습하기 때문에, 정밀도가 좋지 않다. 두 번째로서, 실제 연속 시스템을 일차이산화 하면서 근본적인 오차가 생긴다. 세 번째로서, 상미분 방정식 시스템을 식별하기 위한 신경망 식별기의 적당한 차수를 찾기가 쉽지 않다. 또한, 기존의 신경망은 일정한 시간 간격에서만 시스템의 동작을 예측할 수 있을 뿐이다.

Wang과 Lin은 이 Runge-Kutta 신경망(RKNN)을 이용한 동적 시스템의 식별기를 연구하였다[4]. 이 신경망은 시스템의 상태변화율 즉, 상미분 방정식의 오른쪽 부분을 직접 정밀하게 평가할 수 있어서 장기 예측의 정밀도가 좋다. 그리고, 일반적으로 쓰이는 기존의 신경망에서, 모델링하는 데 쉽지 않는 상미분 방정식을 직접 모델링하기 때문에, 알고 있는 시스템의 물리적 법칙을 RKNN에 접목시킬 수 있다. 또한, 일반적인 신경망 제어에서는 일정한 시간 간격에 국한된 반면, RKNN은 모든 시간에서의 시스템의 동작을 예측할 수 있다.

RKNN에서 신경망의 선택이 학습에 있어서 중요한 역할을 한다. 기존의 신경망은 초기 연결강도를 설정하는데 어려움을 가지고 있다. 그래서 지역적 최소에 빠지는 곤란을 겪는일이 흔하다. 직교 함수의 급수를 이용한 직교 신경망은 이러한 어려움 없이 전체 구조를 결정할 수 있다는 커다란 장점이 있다. 또한 요구되는 정확성을 기준으로 직교 함수의 급수를 늘림으로써 학습하는 동안에 전체 구조를 변형하는 것이 가능하다.

본 논문에서는 직교 함수로서 레젠드레 다항함수를 채택한 직교신경망(ONN)형의 Runge-Kutta 신경망을 이용하여 입력이 있을 때의 식별기와 제어기의 학습알고리즘을 유도하고 식별기와 제어기로 이루어진 비선형 시스템 제어기를 구현하고자 한다. 그리고 사례연구를 통하여 그 특성의 우수함을 보이고자 한다.

2. Runge-Kutta 신경망

2.1 Runge-Kutta 신경망의 구조

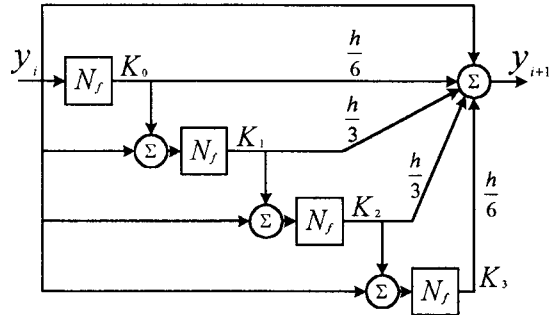


그림 1. 4차 Runge-Kutta 신경망의 구조
Fig 1. Structure of the Fourth-Order RKNN

$\dot{y} = f(x, y)$ 의 형태의 상미분 방정식의 해를 구하는 수학적 방법의 하나인 Runge-Kutta 방법은 식(1)과 같다[8].

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{1}$$

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-2,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

가장 일반적인 Runge-Kutta 방법으로, 4차 Runge-Kutta 방법을 사용한다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0 \text{에 대해서 식(3),(4)}$$

를 만족하는 신경망 $N_f(\cdot)$ 가 존재한다.[4]

$$\dot{y}(t) = N_f(y(t)), y(0) = x_0 \tag{3}$$

$$\|y(t; x_0) - x(t; x_0)\| < \epsilon, 0 \leq t \leq T \tag{4}$$

$$x_0 \in R^m, t \in [0, T]$$

이 신경망에 대한 Runge-Kutta 알고리즘은 식(5)과 같이 표현된다.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} h(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3) \tag{5}$$

$$K_0 = N_f(y_i; w)$$

$$K_1 = N_f(y_i + \frac{1}{2} K_0 h; w)$$

$$K_2 = N_f(y_i + \frac{1}{2} K_1 h; w)$$

$$K_3 = N_f(y_i + K_2 h; w)$$

2.2 직교 신경망

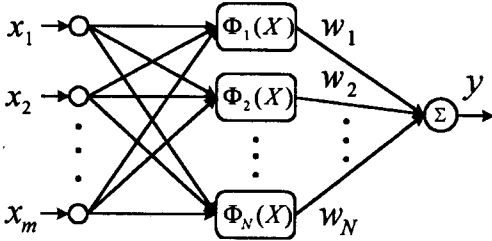


그림 2. 직교 신경망

Fig 2. Orthogonal Neural Network

다변수 함수 $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$, $g: S^m \rightarrow R$, $S^m = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m$ 에 대하여 식(6), (7)를 만족하는 $G(X)$ 가 존재한다[6].

$$G(X) = \sum_{i=1}^N w_i \Phi_i(X) \quad (6)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{S_1} \dots \int_{S_m} (g(X) - G(X))^2 dx_m \dots dx_1 = 0 \quad (7)$$

$$\Phi_i(X) = \prod_{k=1}^m \phi_{kp}(x_k)$$

$\phi_{kp}(x_k)$: k 번째 변수 x_k 에 대한 p 번째 직교함수

$$X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_m]^T$$

식(6)의 $\Phi_i(X)$ 는 공간 S^m 에 대하여 서로 직교인 함수이다.

일반적으로 쓰이는 대표적인 직교 함수는 푸리에 시리즈(Fourier Series), 베셀 함수(Bessel Function), 레젠드레 다항 함수(Legendre Polynomials) 등이 있다. 이 논문에서는 식(8)과 같은 레젠드레 다항함수를 기본적인 직교함수로 사용한다.

$$L_1(x) = 1, L_2(x) = x$$

$$L_{i+1}(x) = a_i x L_i(x) - b_i L_{i-1}(x) \quad (8)$$

$$a_i = 2 - 1/i, b_i = 1 - 1/i$$

$$l_1(x) = 0, l_2(x) = 1$$

$$l_{i+1}(x) = a_i (L_i(x) + x l_i(x)) - b_i l_{i-1}(x) \quad (9)$$

다른 직교 함수와 비교해 볼 때, 확장 항을 결정하기 위하여 레젠드레 다항 함수는 다른 직교 함수들에게는 없는 순환 특성을 가진다.

3. 제어 시스템의 구성과 학습

RKNN을 이용하여 비선형 시스템을 제어하기 위한 시스템은 그림3과 같이 직교 신경망을 가진 RKNN으로 된 식별기와 제어기로 구성된다. 그리고 식별기와 제어기는 모두 오프-라인으로 학습한다. 제어기는 식별기에서 인식한 비선형 시스템의 입출력 정보를 이용하여 시스템입력을 제어한다.

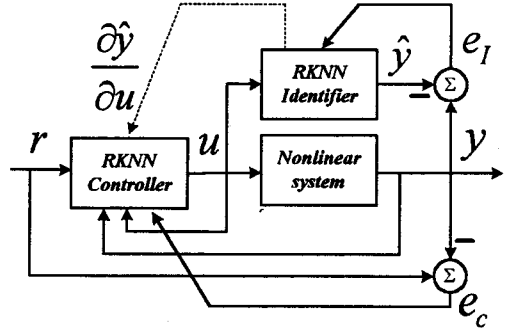


그림 3. 제어 시스템의 구성

Fig 3. Block Diagram of Control System

3.1 식별기의 학습법칙

식별기는 식(10)의 식별오차함수를 최소화하도록 학습한다.

$$E_l = \frac{1}{2} \sum (y(i+1) - (\hat{y}(i+1)))^2 \quad (10)$$

y : 시스템의 출력

\hat{y} : 식별기의 출력

식별기의 연결강도의 학습법칙은 식(11), (12), (13)과 같다.

$$\frac{\partial E_l}{\partial w_{ij}} = \sum e \left(- \frac{\partial \hat{y}(i+1)}{\partial w_{ij}} \right) \quad (11)$$

$$\Delta w_{ij} = \eta_l \left(- \frac{\partial E_l}{\partial w_{ij}} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(i+1)}{\partial w_{ij}} = \frac{1}{6} h \left(\frac{\partial K_0}{\partial w_{ij}} + 2 \frac{\partial K_1}{\partial w_{ij}} + 2 \frac{\partial K_2}{\partial w_{ij}} + \frac{\partial K_3}{\partial w_{ij}} \right) \quad (13)$$

3.2 제어기의 학습법칙

식별기로부터, 시스템의 입출력 정보에 이용하여 (14)식과 같은 오차함수를 최소화하도록 학습한다.

$$E_c = \frac{1}{2} \sum (r - \hat{y})^2 \quad (14)$$

r : 제어기의 기준입력

제어기의 연결강도의 학습법칙은 식(15), (16)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial E_c}{\partial w_{cj}} = \sum e \left(- \frac{\partial \hat{y}}{\partial w_{cj}} \right) \quad (15)$$

$$= - \sum e \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial w_{cj}} \right)$$

$$\Delta w_{cj} = \eta_c \left(- \frac{\partial E_c}{\partial w_{cj}} \right) \quad (16)$$

여기서, $x_1 = u$ 라 하면, 시스템의 입력에 대한 출력의 변화량은 (17)과 같다.

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = \frac{1}{6} h \left(\frac{\partial K_0}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial K_1}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial K_2}{\partial x_1} + \frac{\partial K_3}{\partial x_1} \right) \quad (17)$$

4. 사례연구

본 제어기의 성능을 평가하기 위하여 식(18)로 표현되는 도립 진자 시스템(Inverted Pendulum)을 사용한다. 도립 진자 시스템은 비선형 시스템의 전형적인 예로서 제어 이론의 성능을 입증하는 플랜트로 많이 이용되고 있다.

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + mL\cos\theta\ddot{\theta} - mL\sin\theta\dot{\theta}^2 - u &= 0 \\ m\cos\theta\ddot{x} + mL\ddot{\theta} - mg\sin\theta &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

M : 수레의 질량(50g) m : 진자의 질량(30g)
 l : 진자의 길이(2m) x : 수레의 위치
 θ : 진자의 각도 u : 수레를 미는 힘

도립 진자 시스템의 출력은 Runge-Kutta 방법을 이용하여 이산구간을 0.02초로 정밀하게 하고 RKNN은 0.1초로 하여 비교하였다. 도립 진자 시스템이 동작하는 범위와 제어 출력 범위는 각각, $-1 \text{ rad} \leq \theta \leq 1 \text{ rad}$, $-1.5 \text{ N} \leq u \leq 1.5 \text{ N}$ 으로 하였다. 그림 4는 시스템의 출력과 식별기의 출력을 비교한 것이다. 여기서 볼 수 있듯이, 출력 오차가 거의 나타나지 않는다. 이것은 상미분 방정식으로 표현되는 시스템을 직접적으로 신경망이 표현하고 있기 때문이다. 그림 5는 -1.5N 와 1N 사이의 진자의 각속도를 나타낸다. 그림 6은 제어입력에 따라서 도립 진자 시스템의 출력이 변하고 있는 것을 나타낸다. 입력을 임의로 주었을 때, 그에 맞게 추적해나가고 있다. 위 그림들의 x축들은 time(sec)를 나타낸다.

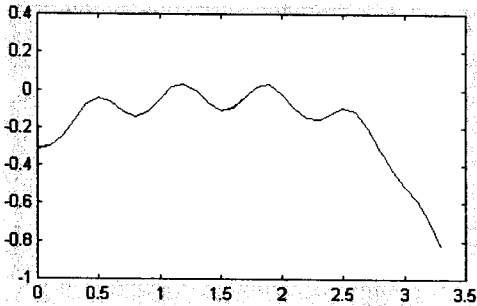


그림 4 . 도립진자시스템과 식별기의 출력
 Fig 4. Outputs of Inverted Pendulum and RKNN Identifier

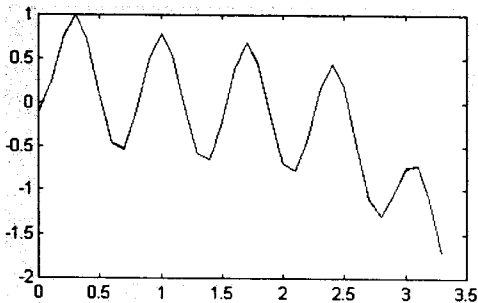


그림 5. 도립진자의 각속도
 Fig 5. Angle Velocity of Inverted Pendulum

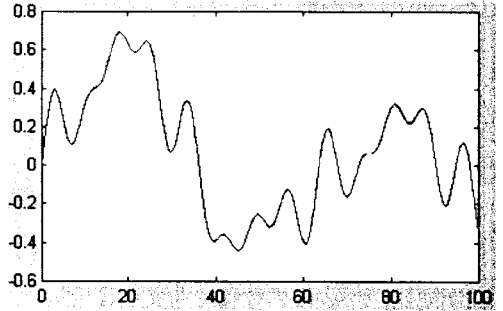


그림 6 도립진자시스템의 제어입력에 의한 출력
 Fig 6. Output of Inverted Pendulum by Control Input

5. 결론

본 논문에서는 상미분 방정식으로 표현되는 신경망이 존재한다는 가정과 Runge-Kutta 방법을 이용하여 입력이 있을 때의 RKNN 식별기와 제어기의 학습알고리즘을 보였다. 그리고, 상미분 방정식으로 표현되는 미지 시스템을 직접적으로 식별하고 제어함으로써 제어기로서 우수함을 보였다. 전체적인 제어 시스템의 구조는 식별기가 시스템의 출력을 추종하도록 학습하고, 식별기로부터의 시스템의 입출력 정보를 이용하여 기준제어입력을 추적할 수 있는 제어를 구성하였다. 그리고 제안된 신경망을 이용하여 비선형 시스템의 대표적인 예 중의 하나인 도립 진자 시스템을 통해서 그 성능이 우수함을 보였다.

(참고 문헌)

- [1] K. j. Hunt, D. Sbarbaro, R. Zbikowski, and P. J. Gawthrop, "Neural networks for control systems: A survey", *Automatica*, vol. 28, no. 6, pp.1083-1112, Nov. 1992.
- [2] K. S. Narendra and K. Parthasarathy, "Identification and control of dynamical system using neural networks", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 1, pp. 4-27, 1990.
- [3] Y. Ichikawa and T. Sawa, "Neural network application for direct feedback controllers," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol 3, pp. 224-231, 1992.
- [4] Yi-Jen Wang and Chin-Teng Lin, "Runge-Kutta Neural Network for Identification of Dynamical Systems in High Accuracy", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol 9, no. 2, pp. 294-307, 1998.
- [5] K. Rohani, M. S. Chen, and M. T. Manry, "Neural subnet design by direct polynomial mapping", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, no. 6, pp. 1024-1026, 1992.
- [6] Shioh-Shung Yang and Ching-Shioh Tseng, "An Orthogonal Neural Network for Function Approximation," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 26, no. 5, pp. 779-785, 1996.
- [7] 김성식, 이영석, 안대찬, 서보혁, "적교 신경망을 이용한 비선형 시스템의 제어", *대한전기학회 하계학술대회 논문집*, pp. 397-399, 1997.
- [8] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, : McGraw-Hill, 1998.
- [9] M. S. Chen and M. T. Manry, "Conventional modeling of the multilayer perceptron using polynomial basis functions", *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 4, no. 1, pp. 164-166, 1993.