

백 스텝핑을 이용한 이동 로봇의 경로 제어기의 설계

이기철, 고재원*, 박민용
연세대학교 전자공학과, *유한대학 제어계측과

Trajectory Controller Design of Mobile Robot based on Back-stepping Procedure

Kicheol Lee, Jaewon Kho*, Mignon Park
Dept. of Electronic Engineering, Yonsei University
*Dept. of Control and Instrumentation, Yuhan College

Abstract - In this paper, the constructive modeling procedure of nonholonomic mobile robot system is carried out with the help of controllability Lie algebra used in differential geometry field, and their geometrical properties are also analyzed. And, a new trajectory controller is suggested to guarantee its convergence to reference trajectory. Design procedure of the suggested trajectory controller is back-stepping scheme which was introduced recently in nonlinear control theory. The performance of the proposed trajectory controller is verified via computer simulation. In the simulation the trajectory controller is applied to differentially driven robot system on the assumption that the trajectory planner be given.

1. 서 론

휠 구동형 이동 로봇은 그 기구학적 특성에 의해서 일반적으로 논홀로노믹 제약 조건을 갖는다. 이러한 시스템은 Brockett의 정리에 의하면 제어가능한 형태로 표현된다 할지라도 연속미분가능하고 시불변인 피드백 제어기로는 평형점의 안정성을 보장해 주지 못한다. 홀로노믹 특성을 갖는 시스템은 고전 역학 분야에서 이미 150년 전부터 연구되어 왔지만 시스템의 제어 문제에 대한 연구가 다루어진 것은 불과 최근의 일이다. 그 이유는 논홀로노믹 시스템에서 발생하는 제약 조건이 일반화된 좌표계에서 시간에 대한 미분 함수로 나타나지 않고 단지 적분 불가능한 속도 사이의 관계로만 표현되기 때문이다. 따라서 이러한 비선형 시스템을 제어하기 위해서는 기본적으로 비선형 제어 방법론을 따라야 한다.

본 논문에서는 논홀로노믹 특성을 갖는 이동 로봇 시스템에 대해서 미분 기하학에서 사용되는 가제어성 리대수의 이론을 도입하여 체계적인 모델링 과정을 수행하고 그 기하학적 특성을 분석한다. 또한 시스템의 경로를 제어하기 위한 새로운 제어기를 제안하며 그 제어기의 설계는 비선형 제어이론에서 도입된 백스텝핑 기법을 적용하여 이루어진다. 백스텝핑 기법을 사용하여 제어기를 설계하는 방식은 안정성을 검증할 수 있는 Lyapunov 함수가 존재함을 항상 보장해 주며, 기존의 피드백 선형화 기법에 의해서 제어기를 설계할 경우 발생할 수 있는 설계상의 어려움을 포함한 여러 가지 단점을 극복할 수 있는 도구를 제공해 준다. 본 논문에서 사용되는 제어기 설계 과정을 기술하면 먼저 이동 로봇 시스템의 기구학 모델을 좌표변환과 입력변환의 과정을 거쳐 체인형 논홀로노믹 시스템으로 표현한 후 백스텝핑 기법에 의해서 경로의 수렴성을 보장해 주는 제어기를 설계한다. 설계된 경로 제어기는 그 설계 절차에 의해서 안정성이 보

장되며 경로 계획기에서 생성되는 운동이 정지하지 않을 경우 Babalat's 보조정리를 통하여 점근적으로 안정함을 증명한다.

마지막으로 경로 계획기가 주어졌다는 가정하에서 차륜형 이동 로봇 시스템에 대해서 제안된 경로 제어기를 적용하여 모의 실험을 수행하고 그 타당성을 검증한다.

2. 백스텝핑(Back-stepping)에 의한 제어기 설계

본 장에서는 비선형 시스템을 백스텝핑에 의해서 피드백 제어를 설계하는 방법에 대해서 살펴보기로 한다. 제어 대상 시스템이 다음과 같이 적분기에 의해 증가된 형태를 갖는 표현식을 갖는다고 하자.

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \quad (2.1a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (2.1b)$$

그리고, 식 (2.1a)가 $\xi \in R$ 를 입력으로 연속미분가능한 피드백 제어 규칙 $u = \alpha(x)$, $\alpha(0) = 0$ 가 존재하여 다음의 조건을 만족한다고 가정하자.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\alpha(x)] - W(x) \leq 0 \quad \forall x \in R^n \quad (2.2)$$

여기서 $V: R^n \rightarrow R$ 은 양한정(Positive definite)하며 방사상으로 유계되지 않는 미분가능한(smooth) 함수이고 $W: R^n \rightarrow R$ 은 양의 한정(Positive definite) 혹은 양의 반한정(Positive semi-definitive) 함수이다.

먼저 $W(x)$ 가 양의 한정 함수이면 다음과 같이 주어지는 함수,

$$V_\alpha(x, \xi) = V(x) + \frac{1}{2}(\xi - \alpha(x))^2 \quad (2.3)$$

는 전체 시스템에 대한 제어 Lyapunov 함수가 되며 이를 기반으로 평형점 $x=0, \xi=0$ 을 전역적 점근적으로 안정화시키는 피드백 제어기 $u = \alpha_\alpha(x, \xi)$ 가 존재한다. 그러한 안정화 피드백 제어기의 한 예를 들면 다음과 같다.

$$u = -c(\xi - \alpha(x)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}[f(x) + g(x)\alpha(x)] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x), \quad c > 0 \quad (2.4)$$

$W(x)$ 가 양의 반한정 함수이면 $\forall \alpha \leq -W(x, \xi) \leq 0$ 를 만족시키고, $W(x) > 0$ 또는 $\xi \neq \alpha(x)$ 일 때 $W(x, \xi) > 0$ 가 되는 피드백 제어 입력 $u = \alpha_\alpha(x, \xi) > 0$ 가 존재한다. 또한 전체 피드백 제어 시스템의 상태 변수 $[x(t)^T, \xi(t)^T]^T$ 는 집합,

$$E_\alpha = \{[x^T, \xi^T] \in R^{n+1} | W(x) = 0\}$$

에 포함된 가장 큰 불변집합(invariant set)으로 수렴해 간다. 이를 살펴보기 위해서 오차변수 $z = \xi - \alpha(x)$ 를 도입하면 제어 시스템의 상태방정식은 다음과 같이 기술된다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)[\alpha(x) + z] \quad (2.5a)$$

$$\dot{z} = u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)(\alpha(x) + z)] \quad (2.5b)$$

식 (2.5a)는 식 (2.2)로 주어지는 가정을 만족하므로 이 식을 이용하여 시스템의 상태 궤적을 따라 제어 Lyapunov 함수 $V_a(x, \xi)$ 의 시간 미분을 구해 보면

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial x}(f+g(\alpha+z)) + z[u - \frac{\partial a}{\partial x}(f+g(\alpha+z))] \\ &\leq W(x) + z[-\frac{\partial V}{\partial x}g + u - \frac{\partial a}{\partial x}(f+g(\alpha+z))] \end{aligned} \quad (2.6)$$

따라서 $\dot{V}_a \leq -W_a(x, \xi) \leq -W(x)$ 가 되도록 제어 입력 u 를 선택하면 W_a 의 양한정 성질과 LaSalle-Yoshizawa의 정리[5]에 의해서 x, z 및 ξ 가 전역적으로 유계이고 시간 $t \rightarrow \infty$ 에 따라 $W(x(t))$ 와 $z(t)$ 는 영으로 수렴해간다. 또한 LaSalle의 정리에 따르면 $[x(t)^T, \xi(t)^T]^T \in E_0 = \{[x^T, \xi^T] \in R^{n+1} \mid W(x) = 0\}$ 안에 포함된 가장 큰 불변집합으로의 수렴성을 보장해 준다. 이와 같은 성질이 만족하기 위해서는 \dot{V}_a 가 z 에 대해서 음한정 함수가 되어야 하는데 식 (2.4)로 주어지는 제어 입력 u 를 식 (2.6)에 적용하면

$$\dot{V}_a \leq -W(x) - cz^2 = -W_a(x, \xi) \leq 0$$

여기서 $W(x)$ 가 양한정 함수라면 LaSalle-Yoshizawa의 정리에 의해서 평형점 $x=0, z=0$ 는 전역적 점근적으로 안정하다. 따라서 $z = \xi - \alpha(x)$ 와 $\alpha(0) = 0$ 로부터 $x=0, \xi=0$ 도 전역적 점근적으로 안정하다.

이를 확장하여 제어 대상 시스템이 식 (2.1)과 같이 하나가 아니라 k 개의 적분기에 의해 증가된 형태를 가질 때 백스테핑 기법에 의해서 제어를 설계하는 문제를 살펴보자. 이러한 경우 제어대상 시스템은 다음과 같이 기술될 것이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} &= \xi_k \\ \dot{\xi}_k &= u \end{aligned} \quad (2.7)$$

식 (2.7)로 주어지는 시스템에 대해서 ξ_1, \dots, ξ_k 를 가상 입력으로 간주하고 앞에서 설명한 백스테핑의 기본 설계 절차를 반복적으로 적용하면 Lyapunov 함수는 다음과 같다.

$$V_a(x, \xi_1, \dots, \xi_k) = W(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [\xi_i - \alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})]^2 \quad (2.8)$$

마찬가지로 $\dot{V}_a \leq -W_a(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}) \leq 0$ 이고,

$W_a(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})$ 가 영이 되는 경우는 $W(x) = 0$, 그리고 모든 i 에 대해서 $\xi_i = \alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})$ 일 때 성립하도록 제어 입력을 선택하면 전체 시스템의 상태 변수 $[x^T(t), \xi_1(t), \dots, \xi_k(t)]^T$ 는 전역적으로 유계이고, LaSalle-Yoshizawa의 정리에 의해서

$$\{[x^T, \xi_1, \dots, \xi_k]^T \in R^{n+1} \mid W(x) = 0,$$

$$\xi_i = \alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}), i=1, \dots, k\}$$

로 주어지는 집합 E_0 내의 가장 큰 불변집합 (invariant set) M_0 로 수렴한다. 여기서 $W(x)$ 가 양한정 함수이면 $x=0$ 은 ξ_1 에 의해서 전역적 점근적으로 안정하게 되고, 이는 평형점 $x=0, \xi_1 = \dots = \xi_k = 0$ 가 제어입력 u 를 통해서 전역적이고 점근적으로 안정하게 될 수 있음을 의미한다. 즉 k 개의 적분기를 포함하는 시스템에 대해서도 백스테핑에 의한 피드백 제어기의 설계는 전체 시스템의 안정성과 유계성을 동시에 보장해 준다는 것을 알 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 백스테핑에 의해서 비선형 시스템의 제어기를 설계할 경우 각 단계마다 전체 피

드백 시스템에 대한 안정성은 언제나 보장된다. 이는 기존의 방법처럼 제어기를 설계한 후 나중에 안정성을 Lyapunov 직접법을 사용하여 증명하는 방법에 비해 훨씬 더 체계적임을 알 수 있다.

3. 차륜 구동형 이동 로봇의 경로제어기 설계 및 모의 실험

본 장에서는 2장에서 제안된 백스테핑 기법에 의한 경로 제어기를 차륜 구동형 이동 로봇에 적용하여 그 결과를 고찰한다.

그림 3.1은 실험에 사용되는 차륜 구동형 이동 로봇의 외관을 보여주고 있다. 이 로봇은 Active Media사에서 제작한 Pioneer 1이고 2개의 고정 휠과 하나의 캐스터형 휠로 구성된 차륜 구동형 이동 로봇의 구조를 갖는다.

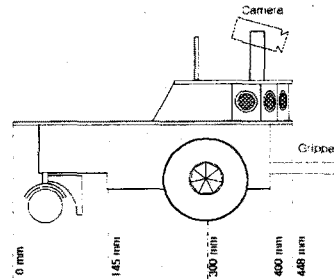


그림 3.1 Pioneer 1 이동 로봇의 외관

차륜 구동형 이동 로봇의 기구학 모델은 식 (3.1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

여기서 변수 v 는 이동 로봇의 선속도를, ω 는 이동 로봇의 회전 각속도를 의미한다.

식 (3.1)과 같은 이동 로봇의 기구학 모델에 대해서,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega \\ u_2 &= v - \omega x_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

로 주어지는 디퍼모피즘(diffeomorphism) 좌표변환과 입력변환을 행하면 이동 로봇의 기구학 모델은 다음과 같은 체인형으로 변환될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

따라서 이동 로봇의 경로 계획기의 모델은 식 (3.5)와 같이 설계된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= u_{1d} \\ \dot{x}_{2d} &= u_{2d} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_{3d} = x_{2d} u_{1d}$$

식 (3.4)와 식 (3.5)로부터 오차 다이내믹스는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1e} &= u_1 - u_{1d} \\ \dot{x}_{2e} &= u_2 - u_{2d} \\ \dot{x}_{3e} &= x_{2e} u_{1d} + x_2 (u_1 - u_{1d}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

식 (3.6)의 오차 다이내믹스의 평형점을 점근적으로 안정화시키는 비선형 제어기를 백스테핑 기법을 적용하여 설계하기 위해서 미분동형상상이 되는 좌표변환 Φ_1 을 적용하면 식 (3.7)과 같은 새로운 상태 변수와 식 (3.8)과 같은 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$y_1 = x_{3e} - (x_{2e} + x_{2d})x_{1e} \quad (3.7)$$

$$y_2 = x_{2e}$$

$$y_3 = x_{1e}$$

$$\dot{y}_1 = u_{1d}y_2 - u_2y_3$$

$$\dot{y}_2 = u_2 - u_{2d} \quad (3.8)$$

$$y_3 = u_1 - u_{1d}$$

식 (3.8)로부터 백스테핑 기법에 의해서 제어기를 설계하면 제어기는 다음과 같이 구해진다.

$$u_2 = u_{2d} - c_2\tilde{y}_2 - u_{1d}\tilde{y}_1 \quad (3.9)$$

$$u_1 = u_{1d} - c_3y_3 + \tilde{y}_1u_2$$

여기서 c_1, c_2 및 c_3 는 설계변수이다. 식 (3.9)에 대해서 식 (3.3)을 적용하여 실제 제어 입력으로 사용되는 v, ω 값으로 변환해 보면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$v = u_{2d} - c_2\tilde{y}_2 - u_{1d}\tilde{y}_1 + x_3[u_{1d} - c_3y_3 + \tilde{y}_1(u_{2d} - c_2\tilde{y}_2 - u_{1d}\tilde{y}_1)]$$

$$\omega = u_{1d} - c_3y_3 + \tilde{y}_1(u_{2d} - c_2\tilde{y}_2 - u_{1d}\tilde{y}_1) \quad (3.10)$$

이동 로봇의 선속도와 회전 각속도는 각 휠에서 주어지는 회전속도의 합성으로 주어지며, 이러한 제어 입력에 대한 이동 로봇의 다이내믹스 운동의 특성은 식 (3.1)과 같다.

이상에서 고찰한 제어기 설계 과정을 종합해 보면 본 논문에서 제안한 경로 제어기는 그림 3.2와 같이 구성된다.

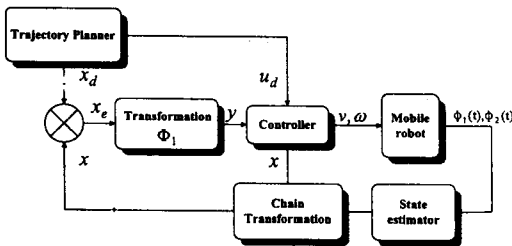


그림 3.2 경로 제어기의 블록도

먼저 경로 제어기의 타당성을 검증하기 위해서 컴퓨터 모의실험을 수행해 보기로 한다. 이동 로봇은 초기 자세에 오차가 있는 것으로 간주하고, 모의실험에 사용된 설계변수는 다음과 같다.

$$c_1 = 5, c_2 = 5, c_3 = 2$$

그림 3.3을 살펴보면 이동 로봇이 추종해야 할 기준경로가 원점에서 출발하여 x축 방향으로 0.1 m/s로 생성되고 이동 로봇의 초기 위치가 y축 방향으로 0.1 m 떨어져 있을 때 경로 제어기에 의해서 기준 경로로 이동 로봇이 수렴해 가는 과정을 보여주고 있다.

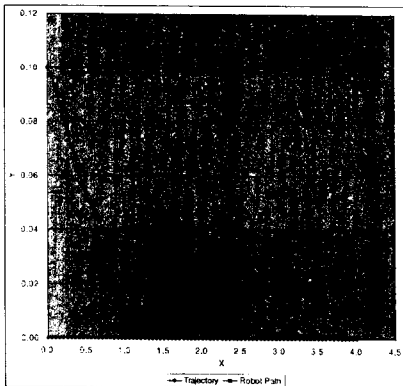


그림 3.3 이동 로봇의 경로 추종 특성

그림 3.3에서 보는 바와 같이 Kanayama[1]가 차륜 구동형 이동 로봇에 설계한 경로 제어기와 비교해 보면 식 (3.10)과 같이 백스테핑에 의해서 설계된 제어기는 수렴속도는 Kanayama의 제어기 보다 다소 느리지만 추종 경로에 있어서 오버슈트 현상이 발생하지 않음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 논홀로노믹 시스템에 대한 해석을 기반으로 이동 로봇의 운동 특성을 분석하고 모델링 작업을 수행하는 절차를 제시하였으며, 또한 이에 대한 경로 제어의 문제를 다루었다. 이동 로봇과 같은 논홀로노믹 시스템은 가제어성 리대수에 의해서 그 운동 특성을 분석할 수 있으며, 또한 가장 간단한 형태의 모델을 이끌어 낼 수 있음을 보였다. 또한 체인형 논홀로노믹 모델을 표현된 일반적인 이동 로봇 시스템에 대해서 백스테핑 기법을 적용하여 경로 제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 제안된 경로 제어기의 안정성은 백스테핑 기법의 설계과정을 통해서 보장되며, 설계된 제어기가 점근적으로 안정함을 Babalat의 보조정리를 사용하여 증명하였다. 본 논문에서 제안한 제어기의 성능을 살펴보면 차륜 구동형 이동 로봇에 적용한 Kanayama의 경로 제어기에 비해 수렴 속도는 떨어지지만 오버슈트 현상이 발생하지 않아 곡률의 변화가 많은 회전 경로에 대한 수렴성이 뛰어난 것을 볼 수 있었다.

본 논문에서 제안한 경로 제어기는 체인형 논홀로노믹 모델에 대해서 설계한 경우에 해당하기 때문에 특정 로봇에 대한 Kanayama의 경로 제어기 혹은 자코비안 선형화에 기반을 둔 Walsh의 경로 제어기와는 달리 체인형으로 변경 가능한 모든 형태의 이동 로봇에 대해서 적용할 수 있다는 장점을 갖는다. 한편 d'Andrea-Novel에 의해서 제안된 피드백 선형화 기법에 기반을 둔 경로 제어기에 비해 설계하는 과정이 시행착오의 과정을 반복하지 않고 보다 체계적임을 알 수 있었다.

(참 고 문 헌)

- [1] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi, "A Stable Tracking Control Method for a Nonholonomic Mobile Robot," IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems(IROS'91), Osaka, pp. 1236-1241, 1991.
- [2] B. d'Andrea-Novel, G. Campion, G. Bastion, "Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots by State Feedback Linearization", Journal of Robotics Research, Vol. 14, No. 6, pp. 543-559, December 1995.
- [3] J. B. Pomet, B. Thuilot, G. Bastin and G. Campion, "A Hybrid Strategy for the Feedback Stabilization of Nonholonomic Mobile Robots," Proc. of the IEEE Conf. on Robotics and Automation, Nice, France, pp. 129-134, 1992.
- [4] B. Thuilot, B. d'Andrea-Novel, and A. Micaelli, "Modelling and Feedback Control of Mobile Robots Equipped with Several Steering Wheels," IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 3, pp. 375-390, June, 1996.
- [5] M. Kritic, I. Kanellakopolulos and P. Kokotovic, "Nonlinear and Adaptive Control Design," John Wiley & Sons Inc., 1995.
- [6] G. A. Lafferriere and H. Susmann, "A Differential Geometric Approach to Motion Planning," In Nonholonomic Motion Planning, Kluwer, pp. 235-270, 1993.
- [7] Y. Xiaoping and S. Nilanjan, "Dynamic Feedback Control of Vehicles with Two Steerable Wheels", Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Minneapolis, Minnesota, April 1996.