

라플라스 방정식의 해를 이용한 삼차원 의학 영상 렌더링

김상욱\*, 안창범  
 광운대학교 대학원 전기공학과

Three Dimensional Medical Image Rendering Using Laplace's Equation

S. M. Kim\*, C. B. Ahn  
 Dept. of Electrical Engineering, Kwangwoon University

**Abstract** - A new multi-planar interpolation technique for three dimensional medical image rendering is proposed. In medical imaging, resolution in the slice direction is usually much lower than those in the transverse planes. The proposed method is based on the solution of the Laplace's equation used in the electrostatics. In this approach, two contours in the source and destination planes for a given object is assumed to have equi-potentials. Some preprocessing and post-processing including scaling, displacement, rotation from the centers of mass are involved in the algorithm. The interpolation solution assumes mostly smoothing changes in between the source and destination planes. Simultaneous multiple interpolation planes are inherently obtained in the proposed method. Some experimental and simulation results are shown.

1. 서 론

3차원의 영상은 2차원의 영상 내의 object를 추출하여 이를 재구성하는 과정으로 얻을 수 있다. 의학영상을 얻기 위한 촬영시간의 단축 등을 이유로 slice 방향(Z축 방향)에 대한 해상도가 X, Y방향의 해상도에 비해 떨어진다. 그래서 의학영상에서 Z축 방향으로 영상의 보간이 필요하다. 그러므로 논문에서는 영상내의 contour를 추출하고, 추출한 contour의 모양을 자연스럽게 표현할 알고리즘 제안한다. 전자기학에서 정전기적 폐 회로를 영상 내에서 폐 contour로 가정하고, contour의 모양 변화를 수치적으로 계산하는 방법이다.

2. 본 론

2.1 Laplace's equation

이 논문에서 사용된 Laplace's equation을 살펴보면, 우선 전위는 z축 방향에서는 변화하지 않는다고 가정하고, 2차원영역을 한 변의 길이가 h인 정방형일 때를 고찰해보자. 그림 1은 위와 같은 영역의 일부를 표시한 것이다. 그림 1에서 서로 인접한 5개점의 전위를 각각  $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4$ 라 한다. 만일 이 영역이 전하를 갖지 않고 균일한 유전체로 충만되어 있다면, 영역내의 모든 점에서  $\nabla \cdot D = 0$  및  $\nabla \cdot E = 0$ 인 관계가 성립한다.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

이 된다. 한편  $E = -\text{grad } V$ 에서

$E_x = -\partial V/\partial x, E_y = -\partial V/\partial y$  이다. 이 관계를 위의 식에 대입하면

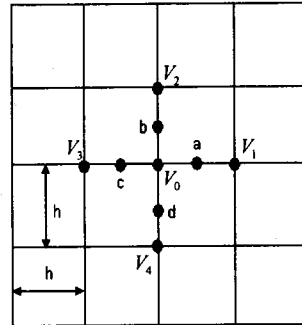


그림 1 한 변의 길이가 h인 정방형으로 나눈 2차원 전위분포를 갖는 영역의 일 부분

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

을 얻는다.

여기에서 편 미분 계수의 근사값은 인접 점의 전위로 표시할 수 있다. 이때

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h} \text{ 및 } \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

이 되며, 이 관계를 이용하여 2차 미분을 구할 수 있다.

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 \doteq \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h}$$

및

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_0 \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h}$$

이다. 이들을 합하면

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h} = 0$$

또는

$$V_0 \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \quad (3)$$

을 얻는다. 이 식(3)에서 h가 영으로 접근할수록 이 식은 보다 정확해진다. 위 식(3)의 의미는 임의 점의 전위는 극히 인접한 4개점의 전위의 평균값과 같다는 것을 표시한 것이다. 반복 횟수의 결정은 모든 정 방향의 정점, 즉 격자 점의 전위가 일정한 값에 도달하여 그 이상 변화하지 않을 때까지 이 방법을 반복한다. 즉, 앞의 수정값과의 차이가 우리가 원하는 오차보다 작을 때까지 반복 수행한다.

2.2 실험 절차

앞에서 언급한 Laplace's equation을 적용하여 interpolation하는 실험 절차는 그림 2와 같다.

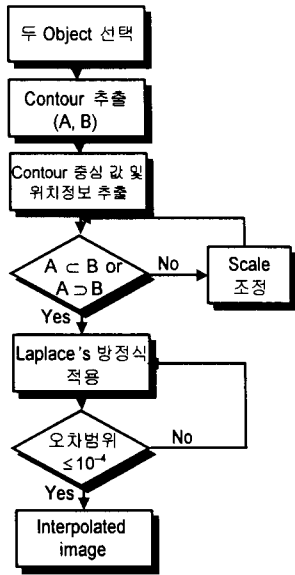


그림 2 Interpolation 순서도

우선 두 image에서 object를 분리하여, 분리한 object의 contour를 추출한다. 두 번째로 contour에 대해 중심 값 및 위치 정보를 추출한다. 세 번째는 두 contour를 중심 이동하여 한 이미지로 재구성한다. 이 과정에서 큰 범위의 contour는 0의 픽셀 값으로 하고, 작은 범위의 contour에 임의의 픽셀 값을 할당한다. 그리고 contour가 겹칠 경우, 한 contour의 scale factor를 조절하여 contour가 겹치지 않도록 한다. 네 번째로 Laplace 방정식을 사용하여 interpolation 수행한다. 영상 내에서 pixel 값을  $f(x,y)$  라 하면,

$$f(x,y) = \frac{f(x-1,y) + f(x,y-1) + f(x+1,y) + f(x,y+1)}{4}$$

( $x, y$ 는 영상 내에서의 픽셀 위치)

이다. 다섯 번째는 관심영상 영역에 대해서, 오차범위를 만족할 때까지 반복적으로 수행한다. 마지막으로 interpolation한 후, 픽셀 값들의 범위 별로 분류하여 interpolated image를 얻는다. 이 과정에서 Scale을 조절하였을 경우, scale 값의 역으로 contour 크기를 조절하여 재구성하고, object가 이동하였을 경우, 이동 벡터의 Inverse를 적용하여 재구성한다.

### 2.3 시뮬레이션 및 결과

제안한 방법을 적용하기 위해 모형을 제작하고, 실험을 수행하였다. 그리고 실제 Axial MR head image를 가지고 적용해 보았다. 우선 작은 원과 큰 원의 모형을 제작하여 제안한 방법을 적용했다. 그림 3은 두 contour 사이에 Laplace' equation을 적용하여 얻은 image와 128라인의 픽셀 값을 보여주고 있다. 여기에서 제안한 interpolation의 분포 곡선이 거의 선형적임을 얻었다. 두 번째는 그림 4의 source image와 destination image인 별표와 마름모 모형을 제작했다. 두 object간에 모양과 이동 성분의 변화가 있을 때 제안한 방법을 적용하여 얻은 contour image들을 보여 주고 있다. 그림 4와 같이 모양과 이동 변화를 잘 추출했다. 세 번째는 그림 5의 source image와 destination image인 분기하는 모형을 제작했다. 그림 5와 같이 제안한 방법을 적용하여 얻은 interpolated image들을 보여 주고 있다. 한 object에서 두 object로 분기하는 경우에도 모양을 잘 추출했다.

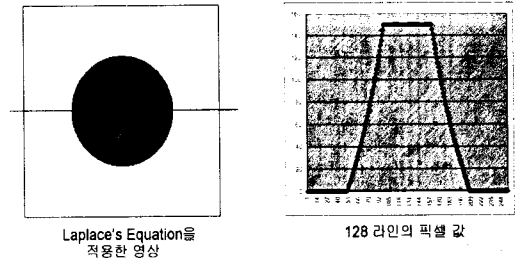


그림 3 Laplace's equation을 적용하여 얻은 분포도 및 픽셀 값

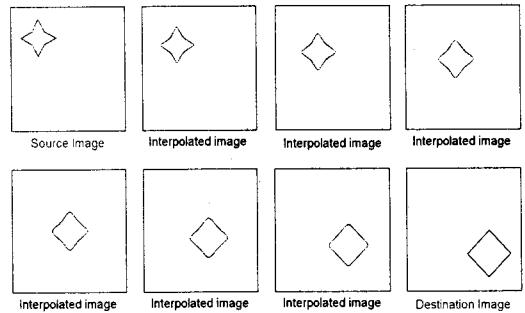


그림 4 모양 및 이동벡터를 고려하여 얻은 Interpolation 한 후의 contour images

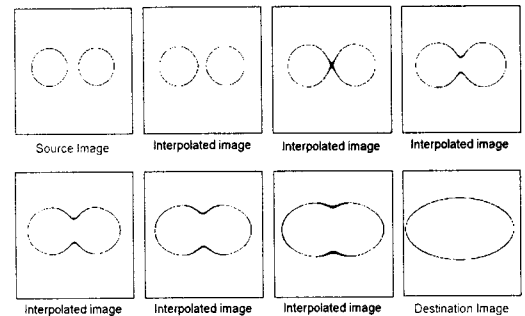


그림 5 분기하는 interpolated images

MRI 촬영으로 얻은 두 장의 axial MR head image를 가지고 제안한 방법을 적용했다. 마지막으로 여러 장의 axial MR head image들을 사용했다. 그림 6과 같이 제안한 방법을 적용하여 3D surface image를 구성하였다.

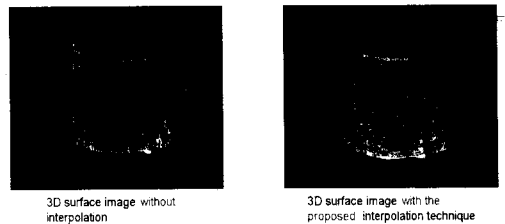


그림 6 Axial head image를 가지고 interpolation을 적용하여 구성한 3D surface image

### 3. 결 론

전자기학에서 정전계의 field를 정의하는 Laplace 방정식을 사용하여, 두 contour 사이에 interpolation 방법을 적용하는 알고리즘을 제안하였다. 앞의 실험결과에서 보았듯이 작은 원과 큰 원의 모형에서 제안한 방법을 적용하여 interpolation 분포 곡선이 선형적인 변화를 관측하였고, 별표와 마름모 모형에서도 contour의 모양과 이동 변화에 부드러운 변화를 관측할 수 있었다. object가 분기하는 모형에서 자연스러운 contour의 변화를 관측하였고, 실제 두 장의 axial MR head image에서도 자연스런 변화를 관측하였다. 제안한 방법으로 CT나 MRI에서 측정된 2차원 multi-slice image를 3차원 object rendering에 적용하여 3D surface image를 구성하였다. 의학 영상에서 Z축 방향으로 영상 보간을 적용하여 자연스럽게 점진적인 image를 얻을 수 있었다. 의학영상의 3D image를 구현하는데 slice 방향(Z축 방향)에 대한 해상도를 향상 시켰다. 의학영상의 surface rendering과 같은 object contour의 정보를 이용하는 응용에 적용될 수 있을 것이다.

#### (참 고 문 헌)

- [1] Wei-Chung Lin, Cheng-Chung Liang, and Chin-Tu Chen, "Dynamic Interpolation for 3-D Medical Image Reconstruction from Serial Cross Sections," IEEE Transactions on Medical Imaging vol. 7, no. 3, pp. 225-232, 1988
- [2] S.Ratnajeevan H.Hoole, P. Ratanamahilan P. Hoole, A Modern Short Course in Engineering Electromagnetics, Oxford University Press, pp.181-189
- [3] J.H. Yoon, C.Y. Kim, D.H. Lee, and C.B. Ahn, "A New Multi-planar Interpolation Technique for Three Dimensional Medical Image Rendering Using Laplaces Equation", Proceeding of the 8th annual meeting of ISMRM, p1545, Denver, USA, (2000)
- [4] William H. Hayt, Jr. "Engineering Electromagnetics", McGRAW-Hill Interational Editons, pp. 162-187