

특정 대역 신호의 주파수 성분 분석을 위한 ZOOM FFT 기법

박종연, 조계현
강원대학교 전기전자정보통신공학부

Improvement of resolution to finite Band using ZOOM FFT

Chong-yeun Park, Gye-hyun Cho
Division of Electrical Electronic information Engineering

Abstract - FFT 알고리즘은 DC 성분에서부터 나이퀴스트 주파수까지 주파수 성분에 관한 해석이며, 주파수 정밀도는 DC 성분에서부터 나이퀴스트 주파수까지의 샘플 수에 의존했다. 하지만 많은 경우, 특정한 주파수 대역에 대한 주파수 정보를 보다 정확하게 분석하고자 하는 상황이 나타난다. 이렇게 특정 주파수 대역에 대해서 확장된 분석을 수행하는 것을 Zoom FFT라 한다. 하지만, 이러한 Zoom FFT를 수행한다 할지라도 FFT 알고리즘이 가지는 특성상 입력 신호가 가지는 정확한 주파수 성분을 얻는다는 것은 불가능하다. 본 논문에서는 Zoom FFT를 수행하는 방법과 수행했을 때 발생하는 예러에 관해서 다룬다.

우선적으로 FFT 해석시에 나타나는 정밀도(resolution)를 결정하는 요소은 FFT 수행시 나타나는 샘플링 간격은 식(1)과 같고, FFT 길이(Length)는 식(2)와 같다.

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \dots\dots\dots(1)$$

$$T = N\Delta t = \frac{N}{f_s} \dots\dots\dots(2)$$

그러므로 FFT 해석시 나타나는 정밀도는 식 (3)과 같이 정의 할 수 있다.

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{f_s}{N} \dots\dots\dots(3)$$

1. 서 론

일반적으로 다루어온 FFT 알고리즘은 DC 성분에서부터 나이퀴스트 주파수까지에 대한 주파수 성분에 대한 해석이며, 주파수 정밀도는 DC 성분에서부터 나이퀴스트 주파수까지 가지는 샘플 수에 의존한다. 또한 많은 경우 특정한 주파수 대역에 대해서 주파수 정보를 정확하게 분석하고자 하는 상황이 나타난다. 이렇게 특정 주파수 대역에 대한 분석과 확장을 Zoom FFT하며 크게 입력 신호에 대해서 필터링 한 후 샘플링 주파수를 감소시키는 방법과 샘플 수를 증가시키는 방법이 존재한다. 하지만 이러한 Zoom FFT를 수행한다 할지라도 FFT 알고리즘이 가지는 특성상 입력신호가 가지는 정확한 주파수 성분을 얻는다는 것은 불가능하다.

그러므로 FFT 수행시 FFT의 정밀도(resolution)를 향상시키기 위해서는 f_s 를 감소시키는 방법과 N을 증가시키는 방법이 존재하게 된다.

2.1.1 f_s 를 감소시키는 방법

샘플링 주파수를 감소시켜서 FFT가 가지는 정밀도를 향상시키는 방법으로 그림2와 같이 우선 계산된 FFT 결과에서 확대하기 원하는 주파수(f_k)를 계산된 FFT 결과에 곱한다. 곱한 결과는 그림2의 ㉠에서와 같이 f_s 를 새로운 기준 점으로 한, 즉 주파수 평면에서 주파수 0로 하는 새로운 형태가 나타난다. 이때 원하는 주파수 대역을 필터링하면 그림2의 ㉡와 같은 주파수 대역만 존재하게 되는데 이때의 최대주파수로 resampling 하는 방법이 다.

2. 본 론

2.1 Zoom FFT 원리

Zoom FFT는 그림1과 같이 FFT 수행한 결과에 대해서 특정 주파수 영역을 보다 더 정밀하게 보기 위한 방법이다. 특정 영역에 대한 정밀성이 요구되므로 FFT 수행시 샘플에 따른 주파수간격이 좁아야 한다.

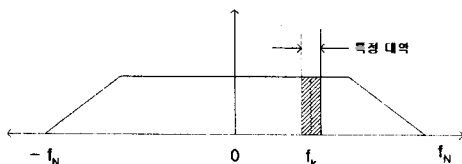


그림1. Zoom FFT 원리

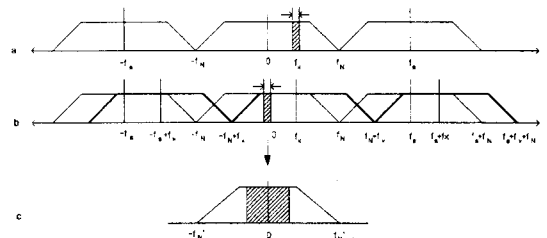


그림2. 샘플링 주파수(f_s)를 감소시키는 방법

신호가 가지는 최대 주파수가 그림2의 ㉠에서는 f_N 이고 ㉡에서는 f'_N 이다. 항상 $f'_N < f_N$ 관계가 성립하므로 최대주파수에 근거한 나이퀴스트 샘플링주파수도 위의 관계에 따라서 감소하게 된다.

2.1.2 N을 증가시키는 방법

FFT에서 N을 증가시키면 주파수 정밀도가 증가하는 것은 쉽게 생각할 수 있지만 이에 따라 계산량이 증가함에 따라서 계산 속도가 크게 감소한다. 그러므로 계산량을 감소시키는 방법이 중요하다. N을 증가시키면서 계산량을 감소시키는 방법은 FFT가 지나는 선형성을 이용한다. 그림3은 전체적으로는 N의 수를 증가시키면서 계산량을 감소시키는 방법이다.

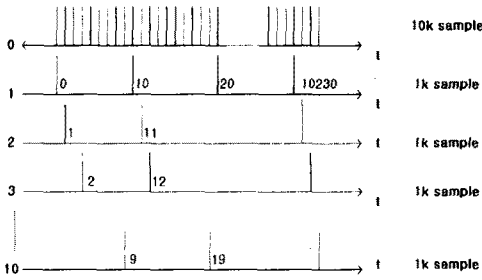


그림3. N을 증가시키는 방법

전체 10k 샘플을 직접 계산하는 것보다는 1k 샘플을 가지는 10개를 계산한 후 더하는 것이 계산 시간이 짧아지는 것을 이용한다. 이때 10개의 1k 샘플이 가지는 FFT를 더하기 위해서는 위상 값을 보정해주어야 한다.

2.2 Zoom FFT 에러 추정

FFT를 수행한 결과가 가지는 에러 값을 추정하는 방법에 대해서는 여러 가지 형태의 에러 추정 방법이 존재한다. 하지만 본 논문이 해석하고자 하는 지진과 해석에 응용할 수 있는 FFT 결과에 대한 에러 추정 방법은 특별히 존재하지 않는다. FFT 수행결과에 대한 에러 추정 방법은 일반적으로 입력 신호가 가지는 특성에 따라서 다른 방법들이 존재한다. 연속시간영역에서의 FFT와 이산시간영역에서의 FFT는 poisson 방정식에 의해서 식(4)와 같은 관계가 성립한다. [1][2]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} F[(n-mN)w_0] = T_s F_n \dots\dots\dots(4)$$

연속시간에서 정의되는 FFT는 식 (5)와 같고, 이산영역에서 정의되는 FFT는 식(6)과 같다.

$$F(w) = \int_0^t f(t)e^{-j\omega t} dt \quad w \in R \dots\dots\dots(5)$$

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad -\infty < n < \infty \dots\dots\dots(6)$$

이때, 수식(5),(6)에서 N이 충분히 크기만 하면, 식(4)는 식(7)과 같이 대략화 될 수 있다.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(nW_0) \approx T_s F_n \dots\dots\dots(7)$$

FFT 수행시 나타나는 에러값을 나타내기 위해서 상대 에러(relative error)를 수식(8)과 같이 정의한다.

$$\text{비교에러} = \frac{\text{추정값} - \text{실제값}}{\text{실제값}} \dots\dots\dots(8)$$

그러므로 상대 에러(relative error)는 식(4)(5)(6)에 의해서

$$E_N(n) = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} F[(n-mN)w_0]}{F(nw_0)} \dots\dots\dots(9)$$

식(9)로 표현될 수 있다. 하지만 입력 신호가 가지는 특성에 따라서 구분되어서 적용되어야 하는데, 본 논문에서는 보다 일반적인 Non canonical-k 함수를 적용한다. k값이 의미하는 것은 입력 함수에 대한 횡수를 의미하고 이는 함수의 미분 값과 관련이 있다.[3]

에러에 관한 것을 급수형태로 표현할 수도 있는데 식(9)를 급수형태로 표현하면 식(10)으로 나타낼 수 있다. 급수로 전개하면 보다 간편하게 에러 값을 계산할 수 있는 장점이 있다.[3]

$$\begin{aligned} E(Z, k) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{Z^{k+1}}{(Z-m)^{k+1}} \dots\dots\dots(10) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{Z^{k+1}}{(Z-m)^{k+1}} + \frac{Z^{k+1}}{(Z+m)^{k+1}} \right] \end{aligned}$$

수식(10)에서 Z값은 $Z = \frac{n}{N}$ 이고, k값에 따른 에러 값에 대한 변화는 그림4와 같다. 비교에러가 가지는 에러표현을 한 그래프 화면에 나타내기 위해서 E(Z,0)과 E(Z,2)값의 부호를 바꾸었다.

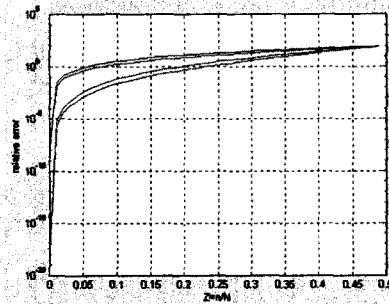


그림4. k값 변화에 따른 에러 값의 변화

그림4에서 보면 Z값, 즉 $Z = \frac{n}{N}$ 이 작아질수록 에러 값이 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 그러므로 FFT를 수행했을 때, 에러 값을 줄이기 위해서는 FFT 해석 포인트(point)수가 많아야 한다는 것을 나타낸다.

2.3 FFT 값에 대한 에러 추정

Canonical-k 함수에 대해서 얻을 수 있는 정확한 FF 값은 식(11)에 의해서 얻을 수 있다.[3]

$$\text{exact value} = \frac{\text{FFT value}}{E(z, k) + 1} \dots\dots\dots(11)$$

주어진 함수가 canonical 함수라면 FFT 수행 시에 나타나는 에러 값을 정정할 수 있다. 또한 상대 에러 (relative error)에서 $E(z, k)$ 에서 k 값에 대한 결정은 신호가 가지는 특성에 의해서 결정된다.

3. 실험

실험에 사용된 입력 파형으로는 지진파 표준 데이터 값을 사용하였고, 이를 FFT 수행한 결과는 그림4와 같다.

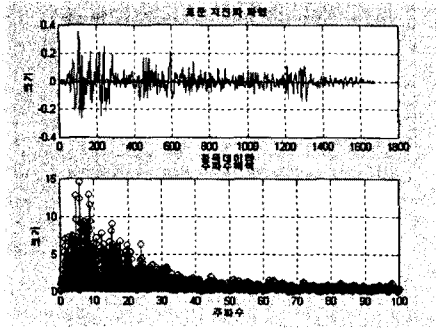


그림4. 사용한 표준 지진파 파형

지진파 표준 데이터를 FFT 수행한 결과 주요 주파수 성분은 0Hz에서 10Hz 부근에 가장 많은 주파수 성분이 몰려있는 것을 확인했다. 또한 FFT 수행한 결과는 많은 오차 값을 가지게 된다. 수행한 FFT 결과 중에서 주파수 10Hz 부근에 확대해서 보다 정확하고 정밀한 결과 값을 찾기 위해서 샘플링 주파수(f_s)를 감소시키는 방법을 적용하면 그림5와 같다.

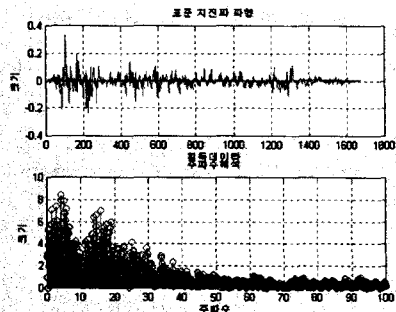


그림5. 지진파 주파수 이동

주파수 이동된 신호에 대해서 10Hz를 차단주파수를 가지는 저역 통과 필터를 통과시키면 그림6과 같다.

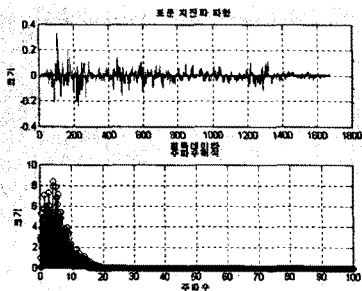


그림6. 필터링 결과

필터링 된 신호에 대해서 FFT를 수행한 후 FFT 수행한 값에 대한 에러 정정 후 신호는 그림7과 같다.

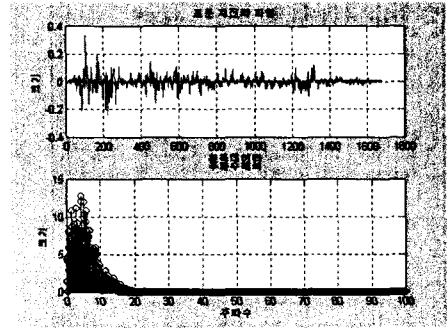


그림7. 에러 수정한 최종 결과

FFT 수행결과에 FFT 에러 정정 후 값을 비교한 값은 그림8과 같다.

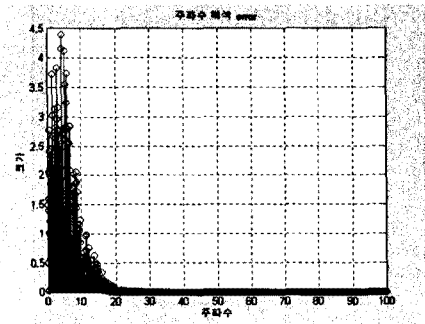


그림8. 에러 값 표현

4. 결론

본 논문은 입력 신호에 대한 FFT 수행결과를 보다 더 정밀하게 나타내기 위한 방법인 Zoom FFT방법에 대한 것과 이를 수행하는 두 가지 방법을 해석했다. 또한 FFT 수행 시에 나타나는 필연적인 에러 값과 FFT에 따른 에러 값을 수정하는 방법을 나타냈다.

이러한 방법을 적용해서 현재 문제가 되고있는 지진파에 대한 주파수적인 측면에서 해석을 하였다. 입력신호로서는 표준 지진파 신호를 사용함으로써 실제응용에 적용될 수 있는 근거를 제시했다.

(참 고 문 헌)

- [1] N. Morrson, "Introduction to Fourier Analysis". New York, Wiley, 1994
- [2] R. I. Becker and N. Morrison, "Closed form error estimations for the FFT", Research reports RR 123 Math. and Appt. Math., Univ. of Cape Town, South
- [3] Ronald I Becker and Norman Morrison, "The Error Estimation of the Fourier Transform", IEEE trans. Signal processing, Vol 44, No 8, 1996