

고속 하다마드 변환을 이용한 적응필터의 안정도에 관한 연구

이태훈*, 서익수*, 박진배*, 윤태성**
 *연세대학교 전기·컴퓨터공학과 **창원대학교 전기공학과

A Study on Stability of Adaptive Filters Using Fast Hadamard Transform

Tae-Hoon Lee*, Ik-Su Seo*, Jin-Bae Park*, Tae-sung Yoon**
 *Yonsei Univ. **ChangWon National Univ.

Abstract - 기존의 LMS 알고리즘을 이용한 적응필터에 비해 연산횟수를 줄이고 입력신호의 통계적 특성에 덜 민감한 적응필터를 제안한다. 입력 신호와 기준신호에 대한 고속 하다마드 변환을 수행한 후 하다마드 변환 영역에서 LMS 알고리즘을 적용한다. 기존의 적응필터와 비교하여 필터의 입력신호 추정 성능은 유지하면서 고속 하다마드 변환으로 인해 적응과정에서의 곱셈연산이 크게 줄어들며 잡음의 분산값 변화와 같은 입력신호의 변화에 대한 필터의 안정도와 강인성이 크게 향상됨을 보인다.

성을 이용하여 다음의 식 (4)와 같이 간단히 주어진다.

$$x = H_N X \tag{4}$$

2.2 고속 하다마드 변환

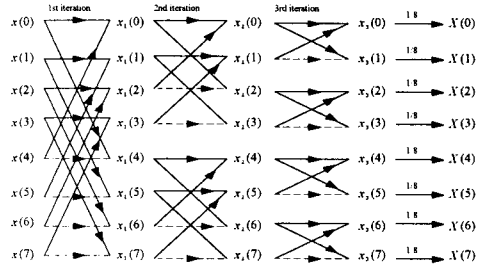


그림 1. 고속하다마드 변환의 과정 (N=8일때, '-' 덧셈, '-' 뺄셈)

식 (2)를 통해서 N개의 시퀀스를 하다마드 변환하기 위해서는 N(N-1)번의 덧셈 또는 뺄셈 연산이 필요하다는 것을 알 수 있다. 그러나 이와 같은 연산횟수는 고속 하다마드 변환(FHT; fast Hadamard transform) [3,4,5]을 통해 덧셈과 뺄셈의 연산횟수를 Nlog₂N으로 줄일 수 있다.

그림 1은 8×1 벡터 $x=[x(0),x(1),\dots,x(7)]^T$ 에 고속 하다마드변환을 수행하여 $X=[X(0),X(1),\dots,X(7)]^T$ 를 얻는 과정을 보여주고 있다.

1. 서 론

적용필터는 간섭 신호의 소거, 선형예측, 시스템 동정과 통신에서의 channel equalization 등, 여러 영역에서 쓰이는 중요한 신호처리 방법이다[1]. 일반적인 시간 영역에서의 적응필터에서는 입력신호가 시간지연소자에 의해 지연되어 N개의 시퀀스(sequence)를 만들고 이들에게 각각에 가중치(weight)를 곱한 후 다시 더하여 출력 신호를 낸다. 이들 출력신호는 우리가 원하는 기준신호(desired signal)와의 비교를 통해 오차를 얻고 이 오차를 이용하여 가중치를 변화시키는 방법을 이용한다. 이때 주로 최소평균자승오차(LMS)기법이 사용된다[2]. 본 논문에서는 가장 효과적인 직교 변환인 하다마드 변환을 적응필터에 적용하여 하다마드 필터를 구현한다. 그리고 연산횟수와 성능 그리고 잡음에 대한 영향을 고려하여 하다마드 필터와 시간 영역에서 구현한 필터를 비교한다.

2. 하다마드 변환

2.1 이산 하다마드 변환

N개의 시퀀스로 이루어진 벡터 x 를 다음과 같이 정의하자.

$$x = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T \tag{1}$$

식 (1)과 같이 정의된 시퀀스에 대해 하다마드 변환을 하여 얻어진 시퀀스를 벡터로 표현했을 때, 이를 X 라고 하자. 그러면 x 와 X 사이에는 다음의 식 (2)와 같은 관계가 성립된다.

$$X = \frac{1}{N} H_N x \tag{2}$$

여기서 H_N 은 $N \times N$ 하다마드 행렬이며 non-singular 행렬이므로 역행렬이 존재하고 하다마드 역변환(IHT; inverse Hadamard transform)을 식 (2)를 참조하여 식 (3)와 같이 얻을 수 있다.

$$x = N H_N^{-1} X \tag{3}$$

식 (3)의 하다마드 역변환 식은 하다마드 행렬의 특

3. 시간영역에서의 LMS 적응필터

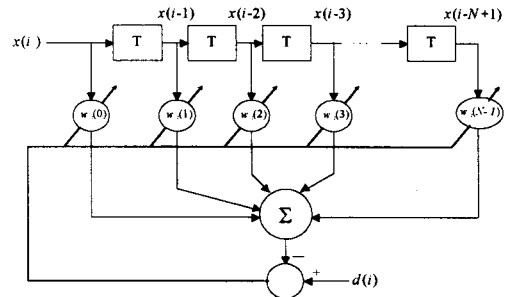


그림 2. 기존의 시간영역에서의 LMS 적응필터

그림 2는 일반적인 시간영역에서의 적응필터의 동작을 나타내는 블록선도이다. 시간 i 에서 입력신호와 그들의 지연신호(delayed signal)들을 나타내는 벡터 x_i 와 그들 각각에 대응하는 가중치(weight) 벡터 w_i 를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= [x(i), x(i-1), \dots, x(i-N+1)]^T \\ \mathbf{w}_i &= [w_i(0), w_i(1), \dots, w_i(N-1)]^T \end{aligned} \quad (5)$$

그리고 i 번째 출력신호 y_i 는 다음의 식 (6)처럼 식 (5)에서 정의된 입력벡터와 가중치 벡터의 내적으로 주어진다.

$$y_i = \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{x}_i \quad (6)$$

우리가 원하는 기준신호를 d_i 라고 했을 때, 기준신호와 출력값 사이의 오차(error)는 식 (7)로 주어진다.

$$\varepsilon_i = d_i - y_i \quad (7)$$

적용필터에서 이와 같이 얻어진 오차는 다음의 가중치 벡터 \mathbf{w}_{i+1} 의 조정을 위해 사용되어지며 최소 평균자승오차(LMS)알고리즘으로 수행된다. 이 방법을 통해 다음의 가중치 \mathbf{w}_{i+1} 는 현재의 가중치 \mathbf{w}_i 와 다음과 같은 관계로 얻어진다.

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + 2\varepsilon_i \mu \mathbf{x}_i \quad (8)$$

여기서 μ 는 수렴 파라미터이다.

4. 고속 하다마드 적용필터

고속 하다마드 변환을 이용한 적용필터의 적용 알고리즘은 시간영역에서 구현한 적용필터와 유사하다. 그러나 입력신호와 기준신호를 고속하다마드 변환을 수행하여 이들 변환된 신호에서 가중치를 얻어낸다는 과정이 다르다. 그림 3에서 이러한 과정을 나타낸다.

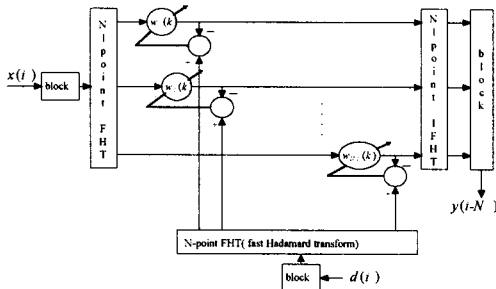


그림 3. 고속 하다마드 변환을 이용한 LMS 적용필터

우선 입력 신호 $x(i)$ 와 기준신호 $d(i)$ 를 N -단위시간까지 하나의 단위 데이터 블록으로 묶는다. 즉, 하나의 단위 데이터 블록안에 $x(N-1), x(N-2), \dots, x(0)$ 의 값들이 존재하고 기준신호에 대하여도 $d(N-1), d(N-2), \dots, d(0)$ 의 값들이 존재하며 이들은 다음과 같이 벡터로 표현한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= [x(N-1), x(N-2), \dots, x(0)]^T \\ \mathbf{d}_k &= [d(N-1), d(N-2), \dots, d(0)]^T \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{x}_k(k)$ 의 k 는 $\mathbf{x}_k(k)$ 가 k 번째 블록임을 나타낸다. 그 다음으로 이들 각각에 고속 하다마드 변환을 수행한다. 이와 같은 변환을 통하여 얻어진 신호는 각각 다음과 같은 단위 데이터 블록을 이루게 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= [X(N-1), X(N-2), \dots, X(0)]^T \\ \mathbf{D}_k &= [D(N-1), D(N-2), \dots, D(0)]^T \end{aligned} \quad (10)$$

그리고 하다마드 영역에서의 출력신호 $\mathbf{Y}_k(k)$ 와 그 역변환으로 얻어지는 $\mathbf{y}_k(k)$ 는 식 (11)과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k(k) &= \mathbf{W}_H(k) \mathbf{X}_k(k) \\ \mathbf{y}_k(k) &= \mathbf{H}_N \mathbf{Y}_k(k) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{W}_H(k)$ 는 하다마드 영역에서의 가중치를 대각원소로 갖는 대각행렬(diagonal matrix)이다

이와 같은 과정을 통해 얻어진 $\mathbf{Y}_k(k)$ 와 $\mathbf{D}_k(k)$ 는 하다마드 영역에서의 오차를 얻어내기 위해 사용된다. 이때 오차는 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_k(k) = \mathbf{D}_k(k) - \mathbf{Y}_k(k) \quad (12)$$

한편, $\mathbf{W}_k(k)$ 는 같은 블록에서의 가중치 벡터로 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{W}_k(k) = [W_{N-1}(k), W_{N-2}(k), \dots, W_0(k)]^T \quad (13)$$

가중치 벡터내의 각 값들은 시간영역에서와 마찬가지로 다음과 같이 적용과정을 거친다.

$$\mathbf{W}_k(k+1) = \mathbf{W}_k(k) + 2\mu \mathbf{E}_k(k) \mathbf{X}_k(k) \quad (14)$$

여기서 $\mathbf{E}_k(k)$ 는 벡터 $\varepsilon_k(k)$ 의 원소들을 대각요소로 갖는 대각행렬이다. 이와같은 적용알고리즘을 통해 데이터블록 단위로 가중치의 갱신과 적용이 이루어지게 된다.

5. 곱셈 연산 횟수 비교

시간영역에서 구현한 적용필터는 N 개의 데이터를 가지고 있는 단위블럭에 대해 N^2 번의 적용과정이 수행된다. 이는 N 개의 서로다른 가중치에 각 데이터가 N 개의 새로운 입력이 들어갈때마다 적용이 이루어지기 때문이다. 반면 하다마드영역에서 구현한 적용필터는 N 개의 데이터를 가진 단위블럭에 대해 N 개의 서로 다른 가중치 값들에 대해 한번씩의 갱신이 이루어지므로 N 번의 적용과정만이 필요하다. 이러한 적용과정 수행에는 한번의 적용과정에 대해 한번의 곱셈연산이 필요하다. 그리고 적용과정의 수와 가중치의 갱신과정의 횟수는 갖고 역시 이 과정에서도 한번의 적용과정에서 한번의 곱셈연산이 필요하게 된다. 따라서 N 개의 데이터 샘플에 대해서 기존의 시간영역의 필터는 $2N^2$ 번의 곱셈연산이 필요하게 된다. 반면에 고속 하다마드 변환을 이용한 적용필터는 N 번의 적용과정과 역시 N 번의 가중치 갱신과정만이 필요하기 때문에 N 개의 데이터 샘플에 대해서 $2N$ 번의 곱셈과정이 필요할 뿐이다. 다음의 표 1은 두 필터의 곱셈연산횟수를 비교한 것이다.

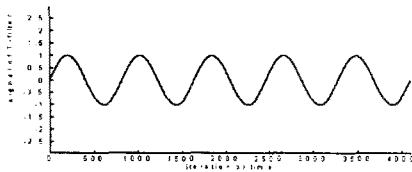
표 1. 곱셈연산횟수의 비교

N	시간영역 필터	하다마드 필터
4	32	8
8	128	16
16	512	32
32	2048	64
n	$2n^2$	$2n$

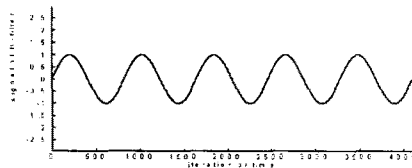
6. 모의실험 및 결과

하다마드 적응필터의 성능에 대한 모의실험으로 잡음이 섞인 신호의 추정 능력을 기존의 적응필터와 비교하여 실험을 행하였다. 필터의 입력신호로는 sine함수에 정규분포를 가지고 분산이 0.1인 잡음이 섞인 신호를 사용하였다. 이 때, 필터 길이 N 값은 8로 취하고, 전체 샘플 시간은 4,096으로 취하였다.

아래 그림 4는 각 필터의 출력을 나타낸다. 이때, 각 필터에 쓰인 안정도 파라미터 값은 해당 필터가 전체 샘플 기간에 대한 최소의 MSE값을 갖도록 정하였다. 즉 시간영역 필터는 μ 값이 0.07일때, 0.0067의 최소 MSE값을 갖고 하다마드 필터는 μ 값이 0.23일때 0.0157의 최소 MSE값을 나타내었다. 결과에서 하다마드 필터가 시간영역 적응필터에 비해 전체 MSE값이 두 배정도 큼을 알 수 있지만 추정 성능에서는 크게 차이가 나지 않음을 볼 수 있다.



(a) 시간영역 필터에 의한 결과(MSE = 0.0067, $\mu = 0.07$)



(b) 하다마드 필터에 의한 결과(MSE=0.0157, $\mu=0.23$)

그림 4. 각 필터의 출력신호 (잡음분산 = 0.1)

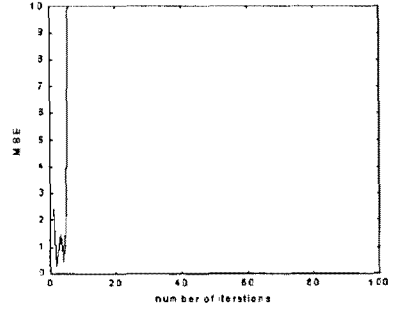
두 필터의 입력신호의 변화에 대한 안정도 특성을 알아보기 위하여 위의 실험과 동일한 조건과 동일한 μ 값에서 잡음의 분산을 1로 증가시켰다. 그림 5는 이러한 조건하에 수행한 각 필터의 시간에 대한 MSE 특성을 보여준다. 그림 5 (a)에서 기존의 적응 필터가 쉽게 발산하는 것에 비해 그림 5 (b)의 하다마드 필터는 추정 능력을 상실하지 않고 오차값이 작아짐을 볼 수 있다.

본 논문의 결과로서, 하다마드 필터는 기존의 시간영역 적응필터에 비해 곱셈연산의 횟수가 크게 줄어들었으며, 잡음에 대한 민감도 정도에서도 우수한 특성이 나타나서 잡음의 통계적 특성이 변화하더라도 쉽게 발산하지 않는 특성을 보임을 알 수 있다.

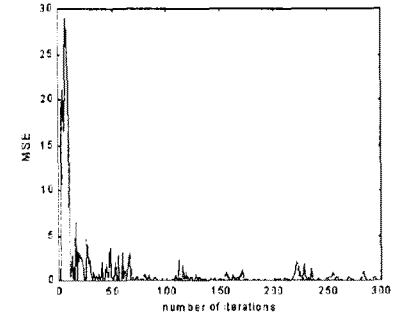
본 연구는 정보통신연구진흥원 대학기초연구지원사업 연구비 지원으로 수행되었습니다.(과제번호 : 99-138)

[참 고 문 헌]

- [1] J. McCool and B. Widrow, "Principles and applications of adaptive filters: A tutorial review," Naval Undersea Center, San Diego, CA, *Tech. Pull.* 530, Mar, 1977.



(a) 시간영역 적응필터의 MSE 변화



(b) 하다마드 필터의 MSE 변화

그림 5. 각 필터의 시간에 대한 MSE 특성 (잡음분산 = 1)

- [2] B. Widrow, J. McCool, M. G. Larimore, and C. R. Johnson, Jr., "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter," *Proc. IEEE*, vol. 64, pp. 1151-1162, Aug. 1976.
- [3] N. Ahmed and S. M. Cheng, "On matrix partitioning and a class of algorithms," *IEEE Trans. Education*, vol. E-13, pp. 103-105, Aug. 1970.
- [4] Y. A. Geadah and M. J. G. Corinthios, "Natural dyadic and sequence-order algorithms and processors for the Walsh-Hadamard transform," *IEEE Trans. Computers*, vol. C-26, no. 5, pp. 435-442, May 1977.
- [5] M. Harwit and N.J.A.Sloane, "Hadamard Transform Optics," Academic Press, 1979.