

網-마디혼합해석기법에 의한 대형회로망 해석

황재호  
대전산업대학교 전자공학과

Loop-node Analysis of Large-scale Network

Hwang Jae-ho  
Taejeon National University of Technology

**Abstract** - 전압원과 전류원 및 RLC 수동소자들로 구성된 대형회로망에서 網과 마디를 복합시킨 새로운 회로망 해석법을 제시하였다. 종래의 수식적 유도 과정이 불필요하며, 도식적 추출에 의해 대형회로망을 간단히 해석한다. 각 전원은 직렬 또는 병렬 임피던스를 반드시 수반하고 있지 않아도 무방하다. 망 설정과 마디 선정 과정에서의 전원 처리에 의해 회로망의 도형화 시켰고, 그로부터 행렬 형태의 부분 식을 도출하였다. 망해석법에 의한 방식과 마디해석법에 의한 기법이 가지전류방향행렬에 의해 합성된다. 합성된 최종 식은 컴퓨터 룩이다.

1. 서 론

전원과 수동소자들로 구성된 대형회로망 해석은 회로를 구성하는 마디와 망에 회로 법칙과 기하학적 배열 원리를 적용하여 행렬 형태의 회로망 방정식을 도출함에 의한다. 이 과정에서 현재까지 문제가 되었던 것 중의 하나는 전류원과 전압원이 함께 존재하는 전원의 수학적 처리였다. 전압원만의 경우는 망해석법을 사용하였고, 전류원만의 회로에는 마디해석법을 적용하여 해석하는 것이 일반적인 방법이었다.[2,3] 두 전원이 함께 존재한 회로망의 경우, 이를 기하학적으로 재구성한 후 마디와 가지 및 망의 연결 상태와 소자에서의 전압, 전류 관계식으로부터 각각 방정식을 도출하여 그 결과들을 최종 합성하는 복잡한 방식을 사용하였다. 그에 따라 망의 수가 2 내지는 3 정도인 매우 단순한 회로망조차도 여러 단계의 기하학적 분석과 수식 유도 과정을 거쳐야만 하였다. 두 전원이 함께 있는 회로망을 망과 마디에서 함께 해석하기 위해서는 망과 가지에서의 전압강하 극성과 전류 방향을 설정하는 도식적 관계가 먼저 규명되어야 한다. 본 연구에서는 망과 마디에서 서로 다른 접근법으로 전원과 수동소자의 관계를 수립하고, 이를 기준극성행렬이나 기준방향행렬이라는 기준식을 도입함으로써 이를 해결하였다. 이 기법을 사용하면 기하학적 도식화를 거치지 않고도 간단한 행렬 계산만에 의해 대형회로망을 해석할 수 있다. 해석법의 유도 과정을 소개하였고 회로적 접근을 통해 검증하였으며, 실제 예제를 통해 확인하였다.

2. 본 론

2.1 문제 설정

회로망 해석의 기본은 망(Loop)과 마디(node)이다. 망에서는 전압과 그 극성으로 수식을 추출하고, 마디에서는 전류와 그 방향을 가지고 각 마디에서 수식을 도출한다.[1,4,5] 망과 마디에서 함께 수식을 도출함에는 망의 특성과 마디의 성격과의 관계를 명확히 하는 회로적 내지는 수식적 접근이 필요하다. 수식화 된 양자의 관계를 통해 망과 마디로부터 도출된 수식들이 하나로 통합된다. 여기에는 다음과 같은 문제를 해결해야한다.

첫째, 망에서의 전압식과 마디에서의 전류관계식을 하나로 통합함에 따른 전압 전류 관계의 수식적 규명 둘째, 전압에서의 극성과 전류에서의 방향에 관한 일괄적 통일 셋째, 전압원과 전류원이 함께 존재하고 상호 등가 변환이 곤란한 경우, 망과 마디에서의 수식화 작업

2.2 망과 마디의 분리

위 문제를 해결하기 위해 회로 해석상 網의 접근과 마디적 접근을 분리한다.

정리1: 회로망 내에  $b_1$ (개)의 전압원,  $b_2$ (개)의 전류 및  $b_3$ (개)의 수동소자가 있으며, 각각의 전원을 독립적으로 회로망에 인가한 경우의 수동소자의 전류를  $i_{kn}$  ( $k=1,2,\dots, b_1+b_2, n=1,2,\dots, b_3$ )라고 하였을 때, 각 소자의 전류  $i_n$ 은

$$i_n = \sum_{j=1}^{b_1} i_{nj} + \sum_{k=1}^{b_2} i_{nk} \quad (1)$$

이다.

증명: 중첩의 원리에 의한다.

$$i_n = \sum_{j=1}^{b_1+b_2} i_{nj} = \sum_{j=1}^{b_1} i_{nj} + \sum_{k=1}^{b_2} i_{nk} \quad (2)$$

□  
보조정리: 회로망의 전압원이  $v_i$  ( $i=1,2,\dots, b_1$ ), 전류원이  $i_j$  ( $j=1,2,\dots, b_2$ ), 수동소자가  $z_k$  ( $k=1,2,\dots, b_3$ )일 때, 회로 해석을 위한 회로망은  $\{v_i, z_k\}$  와  $\{i_j, z_k\}$ 로 분리된다.

증명: 정리 1에 의해 소자의 전류는 전압원들에 의한 결과와 전류원들에 의한 결과의 합이다. 전자는  $\{v_i, z_k\}$ 로 된 회로망이며, 후자는  $\{i_j, z_k\}$ 로 구성된 회로이므로, 서로 분리 해석이 가능하다. □

2.3 망에서의 전압식

전압원과 전류원 및 수동소자로 구성된 회로에서 마디의 수  $n$ (개), 가지의 수  $b$ (개) 및 단독 전류원을 갖는 가지의 수가  $p$ (개)일 때, 회로망 해석을 위한 망의 수는  $b-n+1-p$ 이다[6] 보조정리 1에 의해 단독 전류원들이 모두 제거된 회로망의 각 망에 대하여 전압 관계식을 수립한다.

$$Z_i I_i = V_i \quad (3)$$

여기서

$$Z_i = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & \dots & Z_{1k} \\ Z_{21} & Z_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ Z_{ki} & \dots & \dots & \dots & Z_{ki} \end{bmatrix}$$

$$I_i = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_k]^T$$

$$V_i = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_k]^T$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

$$k = b - n + 1 - p$$

$Z_{ii} = \sum_m Z_{im}$ ,  $m$ 은  $i$ 번째 망 선회시 조우한

임피던스의 개수

$$Z_{ij} = Z_{ji} = \sum_n -Z_{in}, \quad n \text{은 } i \text{번째 망 선회시 인접}$$

망 선회가 교차되는 임피던스의 개수  $i \neq j$

식(3)에서 망 전류  $I_i$ 를 산출한다

$$I_i = Z_i^{-1} V_i \quad (4)$$

$I_i$ 에 의해 각 가지 전류  $I_c$ 를 구한다

$$I_c = T_1 I_i \quad (5)$$

여기서,  $c = 1, 2, \dots, (b-p)$

$T_1 \in R^{i \times (b-p)}$ : 0,  $\pm 1$ 로 구성된 행렬

#### 2.4 마디에서의 전류식

본래 회로망에서 단독 전압원을 제거한 나머지 회로의 각 마디에 전류 관계식을 수립한다

$$Y_m V_m = I_m \quad (6)$$

여기서

$f$ : 단독 전압원을 제거한 나머지 회로의 마디 수

$$Y_m = \begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & \dots & \dots & Y_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{f1} & \dots & \dots & \dots & Y_{ff} \end{bmatrix}$$

$$V_m = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_f]^T$$

$$I_m = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_f]^T$$

$$Y_{ff} = \sum_s Y_{fs} : s \text{는 } f \text{번째 마디와 연결된 어드미}$$

턴스의 수

$$Y_{ff} = Y_{ff} = \sum_g -Y_{fg} : g \text{는 } f \text{번째 마디와 인접된}$$

마디의 어드미턴스 수

$f \neq j$

식(6)에서  $V_m$ 를 산출한다.

$$V_m = Y_m^{-1} I_m \quad (7)$$

$V_m$ 에 의한 각 가지 전류  $I_{CO}$ 를 구한다.

$$I_{CO} = T_2 V_m \quad (8)$$

여기서,

단독 전압원의 개수를  $q$ (개)라 할 때

$$I_{CO} \in R^{(b-q) \times 1}$$

$$T_2 \in R^{f \times (b-q)}$$

#### 2.5 기준 방향 행렬에 의한 합성

식(5)에서 단독 전압원의 수  $q$ (개)에 해당되는 전류를 제거하여 수동소자만의 가지 전류 행렬  $I_{C1} \in R^{(b-q-p) \times 1}$ 을 구한다. 식(8)에서도 단독 전류원의 수  $p$ (개)에 해당되는 전류를 제거하여 마찬가지로 수동소자만의 전류 행렬  $I_{C2} \in R^{(b-p-q) \times 1}$ 을 구한다.  $I_{C1}$ 과  $I_{C2}$  가운데 하나를 선정하여 기준 전류 방향으로

설정한다. 기준전류 방향을 근거로 나머지 전류의 방향을 기준 방향 행렬  $T_3$ 에 의해 보정한다. 만약  $I_{C1}$ 에서 기준 전류 방향을 설정하였다면  $I_{C2}$ 는  $T_3$ 에 의해 방향이 보정된다.

$$I_{C3} = T_3 I_{C2} \quad (9)$$

여기서,  $T_3 \in R^{(b-q-p) \times (b-q-p)}$

$a_{ii} = 1$ : 기준 전류 방향과 일치할 때

$a_{ii} = -1$ : 기준 전류 방향과 반대일 때

$a_{ij} = 0$ :  $i \neq j$

회로망 수동소자의 전류는  $I_{C1}$ 과  $I_{C3}$ 의 합이고, 전류 방향은  $I_{C1}$ 에 의해 결정된다.

$$I_{C\alpha} = I_{C1} + I_{C3}$$

(예제) 마디  $n=5$ (개), 가지  $b=8$ (개), 단독 전류원  $p=2$ (개), 단독 전압원  $q=2$ (개)인 회로망이 있다.

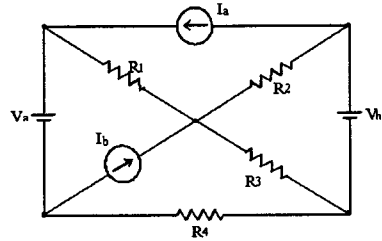


그림 1 본래 회로망

i) 망에서의 전압식

본래 회로망 그림 1에서 단독 전류원을 제거한  $b-n+1-p=2$ (개)의 망에서 식(3)을 유도한다.

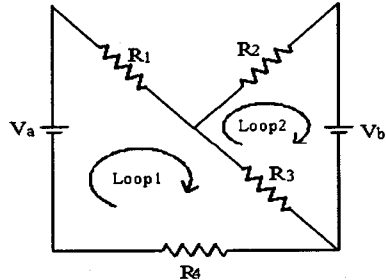


그림 2 전류원이 제거된 회로망

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ -V_b \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_a \\ -V_b \end{bmatrix} \quad (12)$$

식(12)의  $I_1, I_2$ 로 각 소자 전류를 산출한다.

$$\begin{bmatrix} I_{R1} \\ I_{R2} \\ I_{R3} \\ I_{R4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ii) 마디에서의 전류식

그림 1 회로망의 단독 전압원을 제거한 회로에서 식(6)을 유도한다.

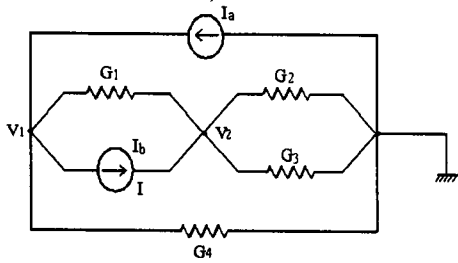


그림 3 전압원이 제거된 회로망

$$\begin{bmatrix} G_1+G_4 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a - I_b \\ I_b \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1+G_4 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2+R_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_a - I_b \\ I_b \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)의  $V_1, V_2$ 로 각 소자 전류를 산출한다.

$$\begin{bmatrix} I_{R1} \\ I_{R2} \\ I_{R3} \\ I_{R4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 \\ 0 & G_2 \\ 0 & G_3 \\ G_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

iii) 기준 방향 행렬에 의한 합성

식(13)의 전류 방향을 기준 방향으로 설정한다.

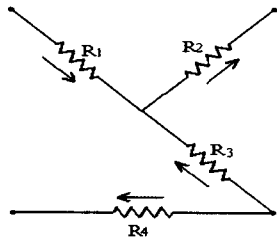


그림 4 기준 전류 방향

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

식(17)을 근거로 두 결과를 합성한다.

$$\begin{bmatrix} I_{R1} \\ I_{R2} \\ I_{R3} \\ I_{R4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_a \\ -V_b \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_a - I_b \\ I_b \end{bmatrix} \quad (18)$$

### 3. 결 론

다수의 전압원과 전류원 및 수동소자로 구성된 회로망을 전압원과 수동소자, 전류원과 수동소자로 된 두 개의 회로로 분리한 다음 각각의 회로에서 전압 및 전류 관계식을 수립하여 각 수동 소자 전류를 구한 후 합성하는 방법을 제시하였다. 망과 마디에서의 수식 정립을 통한 결과의 합성을 기준 방향 행렬을 도입하여 해결하였고 예제를 통해 확인하였다.

### [참 고 문 헌]

- [1] W. H. Kim and H. E. Meadows, Modern Network Analysis, John Wiley & Sons, 1971.
- [2] 김수중, 신핀회로망이론, 반도출판사, 1995.
- [3] 장세훈 외3 공편, 최신회로망이론, 청문각, 1992.
- [4] T. Ozawa, "The Complex Basis in Electrical Networks and Its Application to Network-element-Value Calculation", IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 561-566, 1990.
- [5] J. B. Murdoch, Network Theory, McGraw-Hill, 1970.
- [6] 황재호, 회로망이론, 양서각, 1999, 2.