BEM을 이용한 Cathode방식 시스템에서 전극 위치 최적화

이광호*, 정군석, 백동철, 조윤현
동아대학교 전기공학과

Optimum Location of Electrode of Cathodic Protection System by using Boundary Element Method

Kwang-Ho Lee*, Koon-Seok Chung, Dong-Chul Baik, Yun-Hyun Cho
Dept. of Electrical Engineering, Dong-A University

Abstract -The objective of a cathodic protection system (CP) is to protect the buried metallic structure against the corrosion caused by chemical reaction between the buried structure and the surrounding medium, such as soil. This paper presents a boundary element application to determine the optimal impressed current densities in a cathodic protection system. The potential within the electrolyte is described by the Laplace's equation with nonlinear boundary conditions which are enforced based on experimentally determined electrochemical polarization curves. The optimal impressed current densities are determined in order to minimize the power supply for protection. The solution is obtained by using the conjugate gradient method in which the governing equations and the protecting conditions are taken into account by the penalty function method. Numerical example are presented to demonstrate the practical applicability of the proposed method.

1. 서 론

해양 구조물과 화학 플랜트 등에 관해서는 부식에 의한 피해를 입는 일이 많다. 전도성 부식 매질에 접촉하고 있는 1개의 금속(여기서는 (M)이라고 한다)이 부식하는 경우, 일반적으로 금속의 표면에는 anode반응과 cathode 반응이 국부적으로 진행한다. anode반응은 식 (1)에 의한 화학식으로 표기되는 반응이 일어나면서 금속이 부식한다. 여기에서 n은 전자가의 수이다.

ANODE:

$$M \text{ -------- } M^{n+} + ne^- \qquad (1)$$

cathode반응은 식 (2)에 의한 화학 반응에 의한 수산화물 이온이 발생한다.

CATHODE:

$$\frac{1}{2}O_2 + H_2O + 2e^- \text{ ----- } 2OH^- \qquad (2)$$

그림 1에서는 개념도를 표시한다. 일반적으로, 방식을 효과적으로 하는 목적으로부터 그림에 의하여 복수의 전극이 사용되어 진다. 많은 방식법 중에서도 이것은 최고로 안전하고 신뢰성이 있게 전극을 위치시키는 방법이다. 그러나, 전극의 위치와 인가하는 전류가 많은 것에 대해서 가끔 방식에서 과부족을 발생하고 합리적인 추정법의 확립이 요청되고 있다. 그것으로부터 본 논문은, 구조물의 금속 전체에서 방식을 달성해도 전력을 최소화 하는 것이 좋고 최적 전극 위치 및 인가 전류값을 경계요소법을 사용하여 추정하는 방법에 관하여 검토한다.

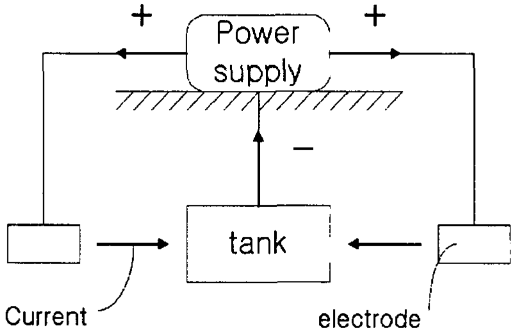

그림 1. Cathode 방식 개념도

2. 기본 방정식

2.1 지배 방정식

그림 2에 표시되는 전해액의 점에 있는 영역을 Ω라고 한다. 그 영역은 3종류의 경계 즉, $\Gamma_d, \Gamma_n, \Gamma_m$으로 둘러싸여 있다. 여기에서 Γ_d는 전위의 지정한 경계, Γ_n은 전류밀도로 지정되어지는 경계, 그리고 Γ_m은 금속 경계이다.

영역내부에 전류를 인가한 m개의 전극 e를 배치한다. 전극에 전류가 흐르는 부분에서 전해 용액중의 전위 ϕ는 식 (3)의 Poisson 방정식을 만족한다.

$$\kappa \nabla^2 \phi = Q_e\, \delta(X_e) \qquad (e = 1 \sim m) \qquad (3)$$

여기에서, κ는 용액의 전도도, Q_e는 전극 e의 전류량, $\delta(\cdot)$는 델타 계수, X_e는 전극 e의 위치, ϕ는 용액내의 각 점 전위이다.

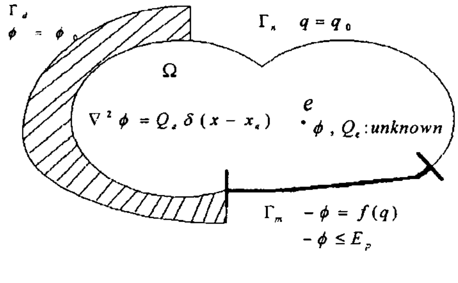

그림 2. 지배방정식 및 경계조건

2.2 경계조건

경계상의 전위 ψ에 의한 전류밀도 q는

$$\psi = \psi_0 \qquad \text{on } \Gamma_d \tag{4}$$

$$q \equiv x\frac{\partial\psi}{\partial n} = q_0 \qquad \text{on } \Gamma_n \tag{5}$$

$$-\psi = f(q) \qquad \text{on } \Gamma_m \tag{6}$$

의 관계식은 만족하고 있다.

단, $\frac{\partial\psi}{\partial n}$는 외부로 향하는 법선 방향의 미분, ψ_0, q_0는 경계 Γ에서의 표텐셜 및 전류밀도이다. 여기서 $f(q)$는 분극곡선을 표시하는 계수이다.

금속 표면 Γ_m상에서는 전위와 전류밀도가 분극곡선을 만족하고 있지 않는다고 가정하면 동시에 방식 상태에 있기 때문에 금속상의 전위는 일정 전위 E_p이하에 있을 필요가 있다. 즉,

$$-\psi \le E_p \qquad \text{on } \Gamma_m \tag{7}$$

을 만족한다.

여기서, E_p는 금속의 방식 전위이다.

본 연구에 대해서는 금속에 접하는 용액의 전위 ψ를 해석하는데 통상 부식문제에 사용되는 포화 감홍(甘汞)전극에 접하는 전위 E의 부호를 반대(-)로 해서 ψ를 사용한다.

2.3 목적계수

방식을 달성하기 위해 필요한 외부 전력 P는

$$P = \int_{\Gamma_\varepsilon} [\psi + f_e(q)]\, q\, d\Gamma \tag{8}$$

로 표현된다. 여기서, Γ_e는 X_e를 중심으로 한 반경 ε으로 둘러싸인 영역이다. 또, $f_e(q)$는 전극 e의 분극곡선을 표시한다. 본 논문에서는 분극이 없는 이상적인 재료를 사용하는 것으로 한다. 즉, $f_e(q)=0$으로 한다.

$f_e(q) \neq 0$인 경우에도 본 연구의 수법을 수정해서 사용 가능하다.

본 논문에서는 전력 최소의 조건을 최적 조건이라고 하는데 식 (8)을 최적화에 관한 목적계수라 한다.

이상에서 cathode 방식 최적화 문제는 식 (3)~(7)을 만족하는 식 (8)을 최소화하는 Q_e, X_e를 구하는 문제로 귀착된다.

3. 해석 수법

본 최적화 문제에 대해서는 표면상의 수치가 중요하며, 지배방정식의 이산화에 관하여는 내부의 요소를 필요로 하지 않는 경계요소법으로 하는 것이 적절하다고 생각되어 진다. 또 이 방법을 사용해서 전극 위치의 배치가 용이해 진다. 우선 Green의 정리에 의한 다음 식이 성립한다.

$$x\int_\Omega (\psi^* \nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*)\, d\Omega = \int_\Gamma (\psi^* q - \psi q^*)\, d\Gamma \tag{9}$$

여기에서, $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_d + \Gamma_m$이고 ψ^*는 Laplace방정식의 기본해이며 $q^* = x\frac{\partial\psi^*}{\partial n}$이다.

좌변에 식 (3)을 대입하고 정리하면 Γ상의 점에 대한 전위 ψ_i는

$$x C_i \psi_i = \int_\Gamma \psi^* q\, d\Gamma - \int_\Gamma q^* \psi\, d\Gamma + x Q_e \psi_{ie}^* \tag{10}$$

로 나타낸다. 이것을 이산화 하면

$$x[H]\psi - [G]q = Q_e g^*(x_e) \tag{11}$$

여기서, g^*의 성분은 2차원장의 기본해에 의해 식 (12)로 나타내어진다.

$$g_i^*(x_e) = x\psi_{ie}^* = \frac{x}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r_{ie}}\right) \tag{12}$$

단, C_i는 i점에 대한 기지 정수

r_{ie}는 점 i와 점 e사이의 거리를 표시한다.

식 (11)에 식 (4)~(6)을 대입하면

$$x[H]\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_n''' \\ -f'''(q_m) \end{pmatrix} - [G]\begin{pmatrix} q_d \\ q_0''' \\ q_m''' \end{pmatrix} = Q_e g^*(x_e) \tag{13}$$

이 된다. 여기에서 첨자 d,n,m은 각각 $\Gamma_d, \Gamma_n, \Gamma_m$상의 수치로 되는 것을 표시한다. 앞에서 표시된 금속 표면상의 전체 영역에서 방식조건으로 식 (7)을 만족해야 한다. 따라서, 식 (7), (13)을 만족하는 Q_e, x_e의 값을 구하고 그 중에서 식 (8)을 최소 화 하는 것을 선택하면 최적 해를 얻는 것이 가능하다. 식 (7)을 식(8)의 최소화에 관한 제약조건을 고찰하고, 베르누이 계수 k를 사용하여 식 (14)를 정의한다.

$$P^* = P(Q_e, x_e) + k\,||h(Q_e, x_e)||^2 \tag{14}$$

P는 적당한 Q_e, x_e로 나타내는데 식 (13)을 ψ및 q에 관하여 해를 구한 후, 식 (8)에 의하여 구하고 전위 ψ의 값은 내점의 식에 의해 Γ_e상에서는 식 (15)에 의해 구해진다.

$$x\psi_i = \int_\Gamma \psi^* q\, d\Gamma - \int_\Gamma q^* \psi\, d\Gamma + x Q_e \psi_{ie}^* \tag{15}$$

또 식 (14)의 $||\,||^2$은 2승 norm으로 표시하고 h는 식 (16)으로 정의되는 성분 벡터가 된다.

$$h_j = (\psi_j + E_p)\, u\,(-\psi_j - E_p) \tag{16}$$

여기서, $u(\cdot)$는 단위 스텝 계수이다.

$k\to\infty$에 대해서는 P^*를 최소화하는 Q_e, x_e 와 식 (13)등에서 추정하는 범위는 제약조건의 식 (7)을 만족

하고 식 (8)을 최소 화 한다.

4. 해석 예

본 방법의 유효성을 확신하고, 아래에 표시한 경우에 관해 2차원 해석을 하였다.

(해석 모델)

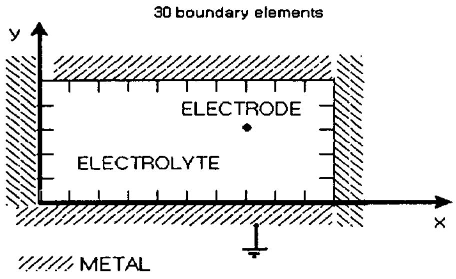

그림 3. 해석 모델

그림 3에 표시한 폭 a ,높이 0.5a 의 장방형 용기를 1개의 전극에서 cathode방식으로 하는 경우를 고찰한다. 기하학적 대칭성으로부터 최적 전극 위치는 용기의 중심에 있다고 가정하면 용이하게 추정되어 진다.
경계요소법에 의한 이산화에는 일정 요소를 사용했는데 요소 수 30개로 하고 그림에 표시되어진 요소 분할을 하였다. 여기에서, 분극 곡선은 그림 4에 표시된 비선형 분극 곡선을 사용하였다.

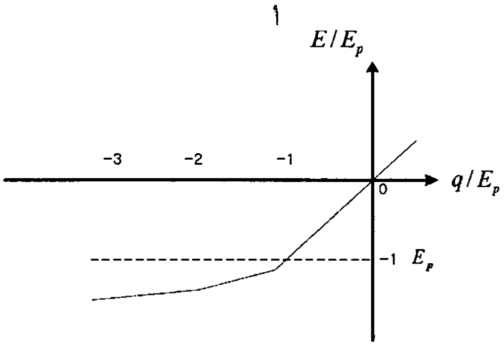

그림 4. 분극 곡선

방식 전위는 $E_p=-1$로 하였다. P(전력) 최소화에 제시되는 것은 공역(共役) 분배법을 사용하여 계산을 하였다. 또 목적계수의 미분은 해석적으로 구하였다.
다음 그림 5에서 7개의 탐색점의 이동을 표시한다. 그림 5는 전극의 위치, 그림 6은 횡축에서 전극의 x좌표, 종축에서 전극의 전류 밀도를 표시하고 있다. $k=10^5$에 대해서 최소화를 하였다. 예상되어진 전극의 위치는 용기의 중심에 모았다. 다시 말하자면 반복되는 계산횟수는 15번정도 필요하였다. 구한 최적전위 분포의 결과를 초기 전위분포와 함께 그림 7에 표시하였다.
초기 전위 분포에는 C, D점에서 방식조건이 만족하지 않았던 것이 최적화한 전위 분포에는 금속 표면상의 전체 영역에서 방식조건이 만족하고 있는 것을 알 수 있다. 또, 이것보다 인가 전압을 작게 한다면 금속 표면상의 전위는 상승하고 방식이 파괴된다. 따라서, 이 해석이 최소 전력의 해가 되는 것을 알 수 있다.

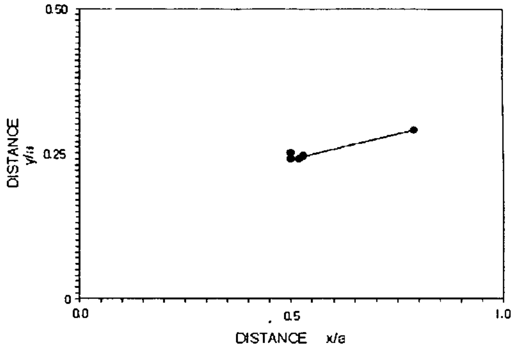

그림 5. 추정점의 이동(위치)

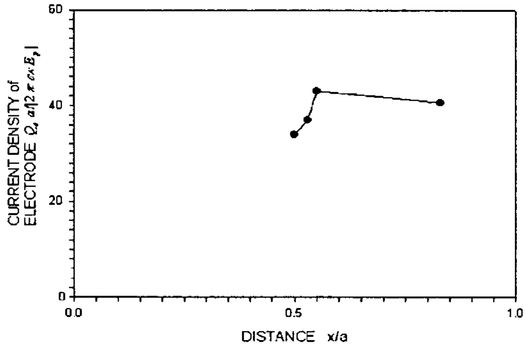

그림 6. 추정점의 이동(전류밀도)

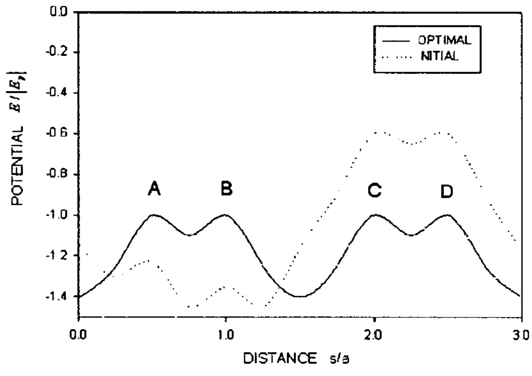

그림 7. 금속표면 전위분포

3. 결 론

본 논문에는, cathode방식 문제에 관하여 최적전극 위치, 전류값을 추정하는 방법에 대하여 연구하였다.
전해액내의 전위장을 Poisson방정식으로 표시하고 설계변수에는 전류 값과 전극 위치로 두고 지배 방정식을 경계요소법으로 근사화 하였다. 또 최적화에는 방식조건을 대칭으로 생각하고 베르누티 계수를 도입하여 공역 (共役) 분배법으로 최소화하였다.

[참 고 문 헌]

[1] Brebbia, C.A ,"the Boundary Element Method for Engineer", 1978
[2] 靑木ほか 2名, 材料37,p757,1988