2000년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2000.7.17-20

TLM법을 이용한 히스테리시스 자성체의 유한요소 해석

임창환 , 김홍규 , 정현교
서울대학교 전기공학부

The Transmission Line Modeling Method for Finite Element Analysis of Hysteretic Material

Chang-Hwan Im, Hong-Kyu Kim, Hyun-Kyo Jung
School of Electrical Engineering, Seoul National University

Abstract - 자성체를 포함하는 자기 시스템을 해석하는데 있어 비선형과 히스테리시스(Hysteresis)는 매우 중요한 역할을 한다. 특히 재질의 히스테리시스 특성을 유한요소법(FEM)을 이용하여 계산하기 위해서 많은 방법들이 소개되었다. 단순 반복법이나 Fixed Point Technique(FPT), M-iteration 법, 뉴튼 랍슨(Newton-Raphson) 법 등이 그 예이다. 이 방법들 중에서 뉴튼 랍슨법은 빠른 수렴 특성으로 가장 많이 사용되고 있다. 하지만 뉴튼-랍슨법을 이용하여 히스테리시스 재질을 해석할 때는 매 반복계산때마다 계 계수행렬(System Stiffness matrix)이 변화하기 때문에 요소의 수가 매우 많은 경우, 역행렬을 계산하기 위한 시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 특히 히스테리시스 해석의 경우에는 주로 time-step법을 이용하여 계산하므로 가장 시간이 많이 소요되는 행렬 계산 시간을 단축함으로써 전체 계산 시간을 크게 줄일 수 있다. 최근 비선형 해석에서 TLM(Transmission Line Modeling)법이 도입되어 비선형 해석 시의 계산 시간을 크게 단축할 수 있게 되었다. 본 논문에서는 비선형 해석에 적용된 TLM법을 히스테리시스 해석에 적용하는 방법을 새로 제안한다. TLM법은 뉴튼-랍슨법과 달리 각 반복 계산때마다 계수행렬식이 변화하지 않고 단지 구동항만 변하기 때문에 행렬의 LU를 한 번 저장해 두면 forward와 backward substitution만 시행하면 된다. 따라서 요소의 수가 증가할 경우 TLM법을 사용하면 뉴튼-랍슨법에 비해 매우 큰 계산 이득을 얻을 수 있다. 본 논문에서는 TLM법을 히스테리시스에 적용하는 방법을 기술하고 간단한 모델에 이 방법을 적용하여 뉴튼-랍슨법과의 비교를 통해 TLM법의 효용성을 보인다.

1. 서 론

Ferromagnetic 재질은 다양한 응용분야에 널리 사용되고 있다. 이 재질을 포함한 전기기기의 정확한 해석을 위해서는 비선형과 함께 히스테리시스 특성을 고려하는 것이 매우 중요하다. 히스테리시스 특성을 유한요소법을 이용하여 해석하기 위해서 많은 방법들이 개발되었다. 예를 들어 Fixed Point 법(FPT) 뉴튼-랍슨법(NRM), M(H) iteration법 등이 그것이다. 이 중에서도 뉴튼 랍슨법이 가장 빠른 방법으로 알려져 있다[1]. 최근 TLM법(Transmission Line Modeling Method)이 비선형 재질을 포함한 유한요소 해석에 적용되었다. TLM법은 매우 안정적인 수렴 특성을 보일 뿐만 아니라 매 반복계산때마다 계 계수행렬이 변화하지 않고 구동항만 변하기 때문에 매우 빠른 특성을 지닌다[2-4]. 본 논문에서는 TLM법을 히스테리시스 재질을 포함한 유한요소 해석에 적용하는 방법을 새로 제안한다. 히스테리시스는 자화의존 프라이자흐 모델을 이용하여 유한요소법에 적용되었고 coercive field를 이용한 constitutive relation을 사용하였다[5,6]. 해석을 통해서 TLM법이 뉴튼-랍슨법보다 더 빠르고 안정적인 특징을 지님을 검증하도록 한다.

2. 등가 전류 모델을 이용한 히스테리시스 모델링

그림 1은 초기자화곡선을 포함하는 히스테리시스 루프의 일부분을 나타내고 있다. Ferromagnetic 재질의 constitutive law는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$H = \nu(B)B + H_c \tag{1}$$

이 때, H_c는 coercive field이다. 따라서 자기저항률(reluctivity)는 다음과 같이 나타내질수 있다.

$$\nu(B) = (H - H_c)/B \tag{2}$$

그러면 유한요소 해석을 위한 지배방정식은 식 (3)과 같다.

$$\nabla \times \nu(B)B = J - \nabla \times H_c \tag{3}$$

이 때 식 (3)의 우변을 가상 전류항으로 생각할 수 있으므로 각 상태(올라가는 상태와 내려가는 상태) 에 따라서 일정하게 정해지는 H_c값만을 바꾸어 줌으로써 단순 비선형 문제로 바꾸어 풀 수 있다. 따라서 식 (3)을 풀기 위해서 뉴튼-랍슨법과 같은 비선형 해석법을 이용할 수 있게 된다[6].

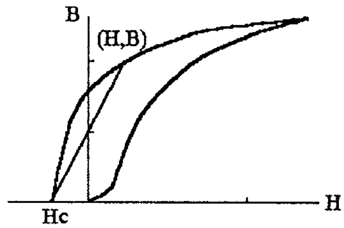

그림 1. 등가전류 모델
Fig.1 Additional Equivalent Current Model

3. TLM법을 이용한 비선형 유한요소 해석

기존의 TLM법에 대한 상세한 설명은 본 논문의 범위를 벗어나므로 본 장에서는 TLM법에 대한 개요만을 싣도록 한다[2-4].

본 장에서는 이방성 물질의 비선형 해석이 가능한 보다 일반적인 TLM법이 소개된다[4]. 그림 2는 TLM법의 topology를 나타내고 있다. 정자장 해석에서 계수행렬(stiffness matrix)의 (i,j)번째 요소는 식(4)와 같이 주어진다. 자기 벡터 포텐셜이 각 절점의 전압을 나타내고 구동항(forcing term)이 각 절점으로 들어가는 총

전류의 합을 나타낸다고 가정하면 정의식 (5)에 의해서 삼각형 요소의 각 변(edge)은 두 개의 병렬 비선형 컨덕턴스(conductance)로 변환될 수 있다.

$$k_{ij} = \frac{1}{4\Delta}\nu_y c_i c_j + \frac{1}{4\Delta}\nu_x d_i d_j \tag{4}$$

$$G_{ijy} = -\frac{1}{4\Delta}\nu_y c_i c_j$$
$$G_{ijx} = -\frac{1}{4\Delta}\nu_x d_i d_j \tag{5}$$

이 때, 형상함수는 $N_i = \frac{1}{2\Delta}(b_i + c_i x + d_i y)$이다. 이 때 TLM법에 의해 그림 2의 비선형 회로는 그림 3에서와 같은 Norton 등가 회로로 변환될 수 있다.

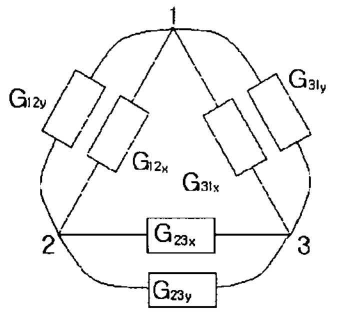

그림 2. FEM요소의 비선형 저항회로로의 변환
Fig. 2. Conversion of a FEM mesh into a nonlinear resistive circuit

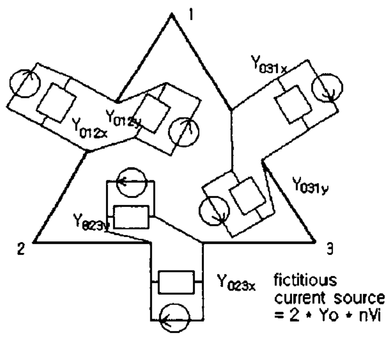

그림 3. 비선형 저항 회로의 Noton 등가회로로의 변환
Fig.3. Conversion of the nonlinear resistive circuit into the Norton equivalent circuit

그러면 x,y각 방향에 대해서 각 회로의 송신단(sending end)에서 식 (6)이 성립하고 수신단(receiving end)에서 식 (7)이 성립하게 된다.

$${}_nV_{ijx(y)} = {}_nV^r_{ijx(y)} + {}_nV^i_{ijx(y)} \tag{6}$$

$$Y_{oijx(y)}({}_nV^r_{ijx(y)} - {}_{n+1}V^i_{ijx(y)}) = G_{ijx(y)}({}_nV^r_{ijx(y)} + {}_{n+1}V^i_{ijx(y)})$$
$$\text{단, } ij = 1,2,3 \text{ , } i<j \tag{7}$$

자세한 계산 과정은 참고문헌 [4]에 잘 나타나 있다.

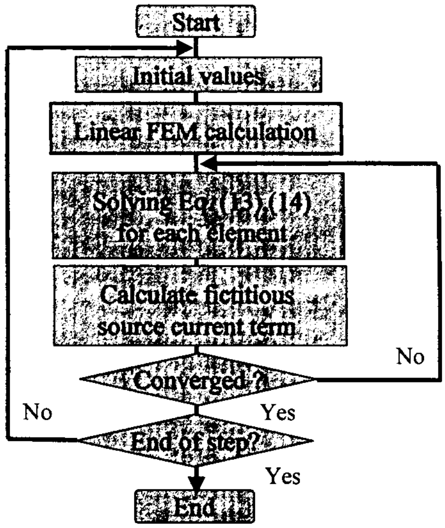

그림 4. TLM법 적용 과정
Fig.4. Flowchart for the TLM method

4. TLM법을 이용한 히스테리시스 해석

그림 5는 히스테리시스 해석을 위한 간단한 모델을 나타내고 있다. 편의상 해석 모델은 y방향으로만 자화가 일어난다고 가정하자. 실제로 일반적인 모델의 경우에는 local coordinate를 사용함으로써 한 방향으로만 자화가 일어난다고 가정할 수 있으므로 이 모델이 충분한 일반성을 가진다고 생각할 수 있다. 모델에서 x방향 자속밀도 성분은 y방향에 비해서 매우 작은 값을 가지므로 x방향 자기 저항률(reluctivity) 성분은 상수값을 가지는 것으로 가정한다. 이 때 constitutive relation은 식 (9)와 같이 표현된다.

$$H_x = \nu_x B_x$$
$$H_y = \nu_y B_y + H_{cy} \tag{9}$$

이 때 ν_x는 선형 자기저항률이고 ν_y는 비선형 자기저항률이다.

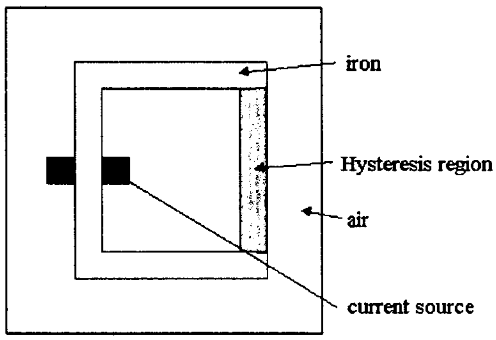

그림 5. 해석 모델
Fig.5. Analysis Model

지배방정식 (3)을 갤러킨(Galerkin)법을 사용하여 정식화 하고 TLM법을 적용시키면 식 (10)과 같은 방정식이 각 요소별로 구해진다.

$$[K^e][A^e]=[f^e]+[g^e]+[f^e_{ie}]$$

$$where, K^e_{ij}=\frac{1}{4\Delta}(\nu_y c_i c_j+\nu_x d_i d_j) \qquad (10)$$

$$f^e_i=\frac{\Delta J_o}{3}\ ,\ g^e_i=\frac{1}{2}H_y c_i$$

이 때, 형상함수는 $N_i=\frac{1}{2\Delta}(b_i+c_i x+d_i y)$이고 $[f^e_{ie}]$는 절점 i로 들어가는 가상 전류원의 전류값의 총합을 나타낸다. 이방성체에 적용된 TLM법을 사용하면 x방향 컨덕턴스는 선형이 되어 가상 전류원의 전류값이 0이 된다. 따라서 y방향 성분에만 관계된 식 (11)-(14)를 사용하여 TLM반복 계산을 수행하면 된다.

$$G_{ijy}=-\frac{1}{4\Delta}\nu_y c_i c_j \qquad (11)$$

$$B_y^2=-\frac{1}{4\Delta^2}\Sigma_{i,j=1,2,3}\ c_i c_j\ (A_j-A_i)^2 \qquad (12)$$

$$_nV_{ijy}=\ _nV^r_{ijy}+\ _nV^i_{ijy} \qquad (13)$$

$$Y_{oijy}(_nV^r_{ijy}-\ _{n+1}V^i_{ijy})=G_{ijy}(_nV^r_{ijy}+\ _{n+1}V^i_{ijy}) \qquad (14)$$

이 4 개의 방정식을 이용하여 TLM법을 적용시키면 수렴된 해를 찾을 수 있다. TLM법을 유한 요소법에 적용할 경우 식 (10)에서 가상 전류항 $[f^e_{ie}]$만이 바뀌고 계수행렬은 변화하지 않는다. 따라서 반복계산 시 처음 계산에서 계수행렬의 LU를 계산하여 저장하기만 하면 이후의 계산에서는 단지 forward substitution 과 backward substitution을 시행해 주면 된다. 실제로 행렬 계산에서 LU를 계산하는 반복 조작수(operation count)는 $O(n^3)$인 반면 forward substitution 과 backward substitution과정의 반복 조작수는 $O(n^2)$이므로 절점의 수가 매우 커질 경우 매 계산 때마다 행렬의 LU를 계산해 주어야 하는 뉴튼-랍슨법에 비해 훨씬 빠른 수렴 특성을 가지게 됨을 알 수 있다. 그림 4는 TLM법을 적용하는 과정을 순서도로 나타내고 있다.

5. 해석 결과

그림 5의 모델에 정현파의 전류를 인가하고 한 주기 동안의 히스테리시스 루프를 계산하였다. 총 40 time step을 사용하였고 수렴 조건은 뉴튼-랍슨법과 TLM법 모두 각 요소별로 $|\Delta A|/|A|<0.0001$로 주었다.

해석 결과는 뉴튼-랍슨법과 TLM법이 완전히 동일한 결과를 얻을 수 있었다. 그림 6은 처음 한 주기 동안의 히스테리시스 루프를 해석을 통해 얻은 결과이다.

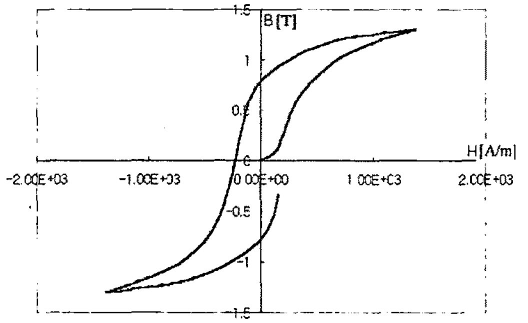

그림 6. 해석을 통해 얻은 처음 한 주기 동안의 히스테리시스 루프

Fig.6. Hysteresis loop obtained by simulation for the first cycle

그림 7은 TLM법의 속도 이득(speedup gain)을 나타내고 있다. (속도 이득 = 뉴튼-랍슨법 계산에 소요된 시간 / TLM법 계산에 소요된 시간). 그림으로부터 절점의 수가 증가함에 따라 TLM법이 뉴튼-랍슨법에 비해 점점 더 빠른 수렴 특성을 나타냄을 확인할 수 있다.

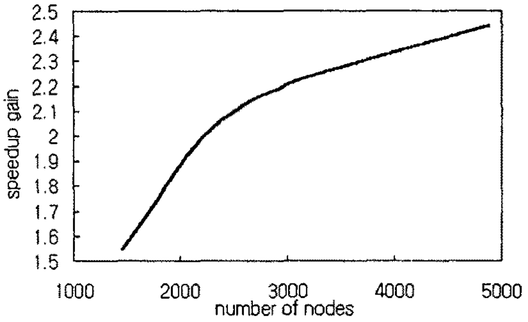

그림 7. TLM법의 속도 이득

Fig.7. Speedup gain of the TLM method

6. 결론

본 논문에서는 비선형 해석에서 적용되어 뉴튼-랍슨법에 비해 훌륭한 수렴 특성을 보인 TLM법을 확장하여 히스테리시스 해석에 적용하는 방법을 새로이 제안하였다. 간단한 모델에 TLM법과 뉴튼-랍슨법을 적용하여 TLM법의 정확도와 속도 이득 특성을 검증하였다. 앞으로 TLM법을 히스테리시스 해석에 보다 잘 활용하기 위해서 뉴튼-랍슨법 이외의 방법들(예를 들어 Fixed Point Technique, M-iteration법 등)과의 비교를 통해 해석 모델에 따라 어떤 방법이 우수한 특성을 가지는가에 대한 비교 고찰이 이루어져야 할 것이다.

[참 고 문 헌]

[1] Julius Saitz,"Newton-Raphson Method and Fixed-Point Technique in Finite Element Computation of Magnetic Field Problems in Media with Hysteresis", *IEEE Trans. on Magn.*, Vol.35, No.3, pp.1398 - 1401, 1999

[2] J. Lobry, J. Trecat, and C. Broche, "The Transmission Line Modeling(TLM) Method as a New Iterative Technique in Nonlinear 2D Magnetostatics," *IEEE Trans. on Magn.*, Vol.32, No.2, pp.559 - 566, 1996

[3] R E Knight and T J Flack, " Exploitation of Symmetry in 2-Dimensional, Finite-Element, Time-Domain Modeling of Induction Motors," *Proceedings of ICEM*, pp1413 - 1416, 1998

[4] 임창환, 김홍규, 이창환, 정현교, "이방성과 비선형성을 고려한 삼상변압기의 TLM-FEM해석", 대한전기학회 논문지, Vol.48B, No.10, pp. 523-529, 1999년 10월

[5] 김홍규, 홍선기, 정현교, "히스테리시스 특성을 고려한 전자계의 유한요소 해석", 대한전기학회 논문지, Vol.48B, No.3, pp.118-123, 1999년 5월

[6] Francois Henrotte, Andre Nicolet, Francois Delince, Andre Genon, Pr Willy Legos,' Modeling of ferromagnetic material in 2D finite element problems using Preisach's model', *IEEE Trans. on Magn.*, Vol.28, No.5, pp.2614-2616, 1992