

3차원 경계적분방정식법을 이용한 정전장 해석

김재홍, 김동훈\*, 박일한  
성균관 대학교, LG전자\*

Electric Field Analysis Using Three Dimensional Boundary Integral Equation Method

Jae-Hong Kim, Dong-Hun Kim\*, Il-Han Park  
Sungkyunkwan Univ., LG Electronic Co.\*

**Abstract** - This paper describes BIEM(Boundary Integral Equation Method) for computation of three dimensional electric field distribution and numerical method that an equivalent charge density is unknown variable. After computing numerically the surface charge distribution, the distribution of both potential and electric field are obtained. Finally, this numerical method is applied to the concentric sphere and the coaxial cylindrical model and numerical result is compared to the analytic solution.

전체 구와 원통형 구 모델에 적용하여 타당성을 검증하였다.

2. 경계적분방정식법

3차원 전자기 시스템의 전계해석을 위한 등가표면전하를 변수로 한 수치해석법의 기본원리는 그림 1과 같은 간단한 모델에 적용하여 구할 수 있다. 이 모델은 매질이 각각 도체와 2종류의 유전체로 구성되어 있다. 유전체는 선형동방성이라고 가정한다. 도체와 유전체에 적용되는 경계적분방정식은 각 매질의 표면에서 분포하는 등가표면전하를 이용하여 구할 수 있다.

1. 서론

대부분의 전자기시스템은 고정밀화, 고효율화되면서 해석 및 설계과정에서 시스템 각부의 정확한 전자기장 분포 계산이 필요하게 되었으며, 기존의 2차원 모델에 국한시켜 해를 구하는 경우, 3차원 실제 모델과의 2차원 해석모델의 근본적인 접근차이로 발생하는 수치오차를 줄이기 위해 3차원 해석은 불가피하게 되었다. 하지만, 최근 전자기해석에 가장 많이 사용되는 형상 모델링을 위한 일반적이고 편리한 도구를 찾기가 어렵고, 게다가 기존의 2차원문제에 주로 이용되어 온 유한요소법은 3차원으로 확대적용 시 여러 현실적 어려움이 있다. 우선 해석대상의 기하학적 형상 모델링을 위한 일반적이고 편리한 도구의 개발이 상당히 어렵고 이를 사용한다고 할 지라도 복잡한 구조일 경우는 모델의 이산화와 그래픽에 의한 3차원 형상표현이 상당히 어렵다. 이는 전자기 현상의 특성상 전자기장은 매질이 없는 공기 부분에서도 존재하기 때문이다. 이러한 특성이 기계공학의 구조해석, 유체해석, 온도해석 등과 전자기장해석의 차이일 뿐 아니라 어려움을 주는 주된 이유가 된다. 뿐만 아니라 3차원 유한요소법을 사용할 경우 시스템방정식의 미지수가 엄청나게 증가하게 되어 컴퓨터의 많은 메모리 용량과 빠른 프로세서의 사용이 필요하고 계산시간이 상당히 길어진다. 또한 이러한 과정 중에 수치해석의 오차 누적에 따른 계산의 정확도에 문제가 발생한다.

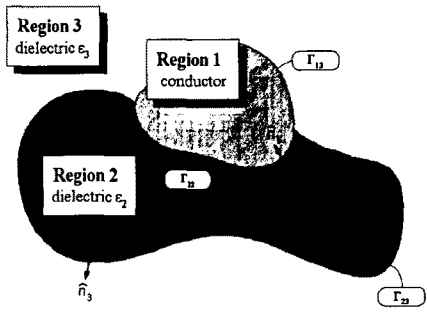


그림 1 도체와 유전체로 구성된 계

이러한 문제들을 해결하기 위하여 본 논문에서는 3차원 전체를 비교적 높은 정확도를 가지고 해석할 수 있는 그린함수를 이용한 경계적분방정식법(BIEM : Boundary Integral Equation Method)을 이용하였다. 이 방법은 우선 매질이 존재하는 표면에서만 이산화가 필요하므로 3차원모델링이 유한요소법에 비하여 상당히 간단하고, 그린 함수 자체로서 무한경계조건이 자동으로 만족되어 경계조건을 적용할 필요가 없으므로 송전선과 같은 개역문제(Open Boundary Problem)에 적합하다.

관찰점(observation point)  $\vec{r}_f$ 에서의 포텐셜을  $\phi(\vec{r}_f)$ , 근원점(source point)  $\vec{r}_s$ 에서의 전하밀도를  $\sigma_s(\vec{r}_s)$ 라고 하면, 그림에서 도체와 유전체의 경계인  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{13}$ 에서 포텐셜은 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi(\vec{r}_f) = \int_{\Gamma} \sigma_s(\vec{r}_s) G(\vec{r}_f, \vec{r}_s) d\Gamma \quad (1)$$

위 식에서  $G(\vec{r}_f, \vec{r}_s)$ 는 그린함수로서 다음과 같다.

$$G(\vec{r}_f, \vec{r}_s) = \frac{1}{4\pi r} \quad (2)$$

여기서,  $r$ 은 점  $\vec{r}_f$ 와  $\vec{r}_s$ 사이의 거리이다. 그리고, 두 유전체의 경계  $\Gamma_{23}$ 에서의 포텐셜은 다음과 같다.

$$\frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{2} \sigma_e(\vec{r}_f) = (\epsilon_2 - \epsilon_3) \int_r \sigma_e(\vec{r}_s) \frac{\partial G(\vec{r}_f, \vec{r}_s)}{\partial n} d\Gamma \quad (3)$$

여기서  $\epsilon_2$ 와  $\epsilon_3$ 는 각 유전체의 유전율이고,

$\frac{\partial G(\vec{r}_f, \vec{r}_s)}{\partial n}$ 는 점  $\vec{r}_f$ 에서의 유전체 경계의 법선방향

에 대한  $G(\vec{r}_f, \vec{r}_s)$ 의 포텐셜 도함수이다.

전체 표면위에서의 전하밀도를 구하기 위해서 위 두식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{il} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{e1} \\ \vdots \\ \sigma_{ei} \\ \vdots \\ \sigma_{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서,  $\sigma_{ei}$ 는 해당 요소의 표면전하밀도이고,  $p_{ij}$ 는 계수행렬의 한 요소이다. 이 때, 점 1, 2, ...,  $i$ 는 도체 표면위의 점이고,  $i+1, i+2, \dots, l$ 은 유전체표면위의 점이다. 또한,  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i$ 는 각각 점 1, 2, ...,  $i$ 에서의 포텐셜이다.

해석매질의 표면을 분할한 후에 각 점들이 결정이 되고, 이와 같은 알고리즘을 통하여 원하는 지점에서의 수치해를 얻을 수 있다.

### 3. 수치해석 사례

#### 3.1 구 해석모델

그림 2는 반지름이 1.5[m]인 도체구에 100[V]의 포텐셜을 인가시키고 외부에 각각 비유전율이 5, 1인 유전체로 둘러싸여 있고, 각 매질사이의 거리가 0.5[m], 가장 바깥쪽 표면을 접지 시킨 구형모델에 단면도이다.

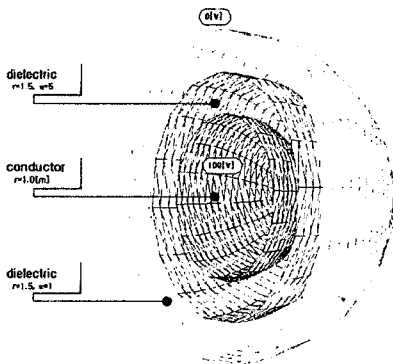


그림 2 구 모델

총 요소개수를 3936개로 이산화시키고, 모델의 중심에서 x축, z축상의 각 위치에 따른 포텐셜과 전계세기를 그림 3, 그림 4에 나타내었다.

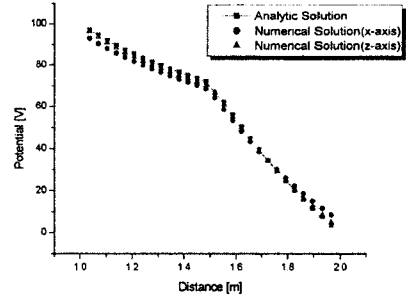


그림 3 x축 위의 각 지점에서 포텐셜

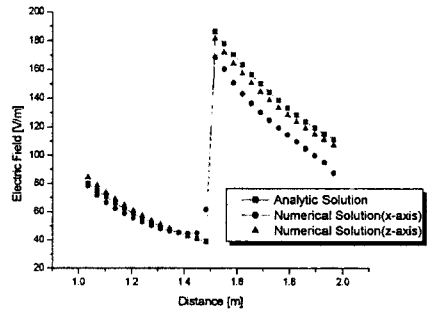


그림 4 x축 위의 각 지점에서 전계세기

그림 5는 각 지점에서의 수치적으로 계산한 포텐셜과 전계세기를 해석해와 비교한 후 오차를 구현한 그래프이다.

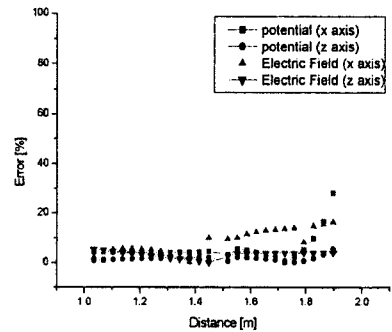


그림 5 각 지점에서의 오차

#### 3.2 동축 원통 해석모델

그림 6은 반지름이 1.5[m]인 도체원통에 100[V]의 포텐셜을 인가시키고 외부에 각각 비유전율이 5, 1인 유전체로 둘러싸여 있고, 각 매질사이의 거리가 0.5[m], 가장 바깥쪽 표면 접지 시킨 구형모델에 단면도이다.

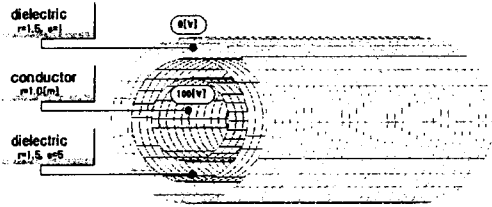


그림 6 동축 원통 해석모델

총 요소개수를 2520개로 이산화시키고, 모델의 중심에서 x축상의 각 위치에 따른 포텐셜과 전기세기를 그림 7, 그림 8에 나타내었다.

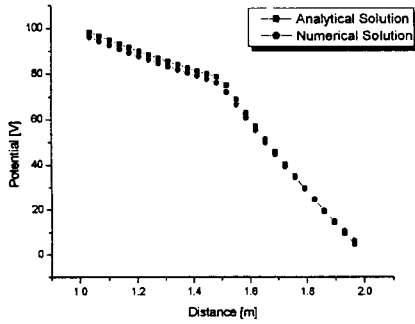


그림 7 x축 위의 각 지점에서의 포텐셜

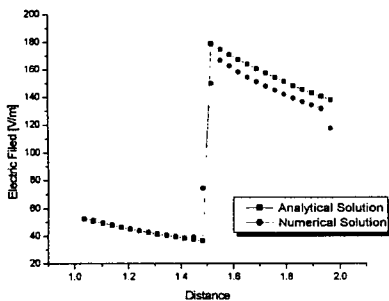


그림 8 x축 위의 각 지점에서의 전기세기

그림 9는 각 지점에서의 수치적으로 계산한 포텐셜과 전기세기를 논리해와 비교한 후 오차를 구현한 그래프이다.

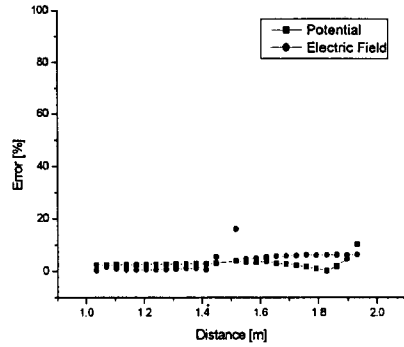


그림 9 각 지점에서의 오차

이상과 같이 구해석모델과 원통해석모델에 경계적분방정식법을 적용하여 포텐셜과 전기세기를 구한 수치해와 해석해를 비교한 오차가 그림 5, 그림 9와 같이 비교적 오차가 2[%]~5[%]정도로 정확도의 신뢰성이 매우 높은 것으로 검증되었다. 매질 표면 근처에서 오차가 다소 커지는 경향이 있었지만, 알고리즘의 보완으로 앞으로 해결이 가능할 것으로 사료된다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 등가표면전하를 미지변수로 지정한 경계적분방정식법을 이용하여 해석해가 존재하는 도체와 유전체로 구성된 구해석모델과 원통해석모델에 적용하여 해석해와 수치해 비교하였다.

그 결과, 정확성의 신뢰도가 상당히 높았음을 확인하였고, 계산시간이나 효율성등을 고려했을 때 3차원 정전장 해석에 유용한 수치해석법으로 사료된다.

#### (참 고 문 헌)

- [1] Ken Hayami, "High Precision Numerical Integration Methods for 3-D Boundary Analysis," *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol.26, NO.2, March 1990
- [2] J.Daffe, R.G.Olsen, "An Integral Equation Technique For Solving Rotationally Symmetric Electrostatic Problems in Conduction and Dielectric Material," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. Pas-98, No.5, Sept/Oct, 1979
- [3] W.S.Hall, "The Boundary Method", Newnes-Butterworths, 1980