

스퍼 기어계의 방사소음 예측

° 박찬일*

Prediction of Radiated Noise from a Spur Gear System

Chan IL Park

ABSTRACT

In order to predict the noise of the spur gear system, a simplified model of spur system including the housing is studied. The spur gear is modeled as a single degree of freedom system. The shaft-housing system is modeled as a clamped circular plate connected with a beam. The moment components of the beam excited by the spur gear mesh force are considered in the calculation of plate vibration and radiated noise. The out-of-displacements of the clamped circular plate due to the r-direction moment and θ -direction moment are calculated. Radiated noise from the plate in the air is also calculated using Rayleigh integral. Using the numerical example, the numerical validation of the analytical procedure on the noise prediction are given.

1. 서론

하우징을 포함한 기어계로 부터의 방사소음의 예측은 소음 저감에 대한 사회적인 요구와 소비자로부터 요구 때문에 중요성이 더해가고 있다. 보통 기어설계자는 하우징을 포함한 기어계의 진동 소음 특성을 이해하기 위해 많은 어려움을 가지고 있다. 특히 하우징의 모드가 너무 복잡하기 때문에 설계자가 하우징의 기본적인 소음, 진동 특성도 파악하기가 매우 어렵다. 이에 관련된 연구로 Lim(1991)은 연성된 손실계수(the coupling loss factor)를 결정하기 위해 통계학적 에너지법(statistical energy analysis)을 사용하여 스퍼기어쌍을 포함한 일반적인 기어상자를 조사하였다. Jacobson (1996)은 음향세기(acoustic intensity)측정으로부터 방사효율을 계산하고 사각평판을 사용하여 방사효율을 예측하였다. Jacobson (1996)에 의해 언급된 많은 연구가 방사소음을 예측하고자 하였다. 박(1998, 1999)은 축방향 가진과 전단력 가진에 의한 축-플레이트계에 대한 방사소음을 예측하였다. 그러한 소음 예측의 시도의 일환으로 하우징을 포함하는 한다. 스퍼 기어계의 단순화된 모델링을 이용하여 방사

소음과 진동의 전달특성에 대한 간편한 접근방법을 제시하고자 한다.

2. 해석모델

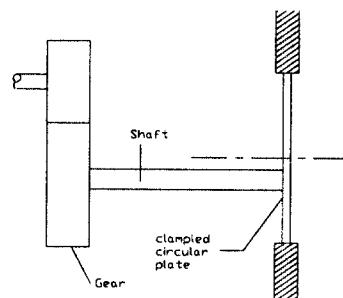


Fig.1 Model for a gear-shaft-plate system.

Figure 1은 이 해석에서 사용된 모델이다. 사용된 기어는 스퍼 기어이고 축은 고정된 원형 플레이트와 축 중심에서 벗어나서 연결되어 있다. 구동기어는 일정한 토크로 가진 되어진다. 스퍼 기어는 일 자유도의 진동 시스템으로 모델링되고 축은 베르놀리 오일러 보, 베어링은 강체로 기어 하우징은 고정된 원형 플레이트로 모델링 하였다. 기어, 축과 플레이트는 연성

*정희원, 강릉대학교 정밀기계공학과

되어 있지 않다고 가정한다. 힘과 변위 전달을 모델링하기 위해 보를 위한 전달함수가 사용된다. 기어에 의해서 플레이트에 전달된 힘과 모멘트 중에서 보의 모멘트 성분이 플레이트 진동, 소음에 가장 기여할 것으로 이 부분의 성분을 고려한다. 기어의 전달력은 작용선 상에서 작용하므로 보를 통하여 플레이트 상에 r 방향과 θ 방향 모멘트로 작용한다. 이러한 모멘트에 의한 플레이트 진동과 플레이트로부터의 방사소음을 해석적으로 예측한다.

2.1 기어

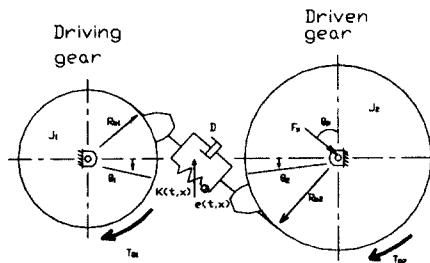


Fig.2 Gear model.

Figure 2는 이 해석에 사용된 진동 모델이고 식(1)과 같이 변동하는 치 강성과 감쇠, 치의 오차에 의한 가진을 포함하는 비선형 방정식이다

$$M\ddot{x} + 2\xi_c \sqrt{Mk} \dot{x} + k(t, x)x = W + F(t, x) \quad (1)$$

where

$$x = R_b_1\theta_1 - R_b_2\theta_2, \quad F(t, x) = \sum_j k_j e_j$$

이 식에서 치의 강성은 맞물리는 한 주기 동안에 이론적으로 접촉하는 점에 대하여 각각 계산되고 치형에 수직한 방향에서 계산된다. 이 계산에서 전달된 전체 하중의 크기와 방향이 일정하고 치변형의 모든 변수는 치의 탄성효과만으로 제한하며 치면 사이의 윤활막의 효과는 무시한다. 그리고 맞물리는 한 쌍의 기어의 전체 강성은 3 가지 요소에 의하여 영향을 받는다고 가정한다. (박, 1992; Tavakoli et al., 1986) (1) 굽힘과 전단에 의한 외팔보 변형 (2) 지지되는 부분의 유연성으로 인한 치의 강체 회전 (3) 접촉으로 인한 변형.

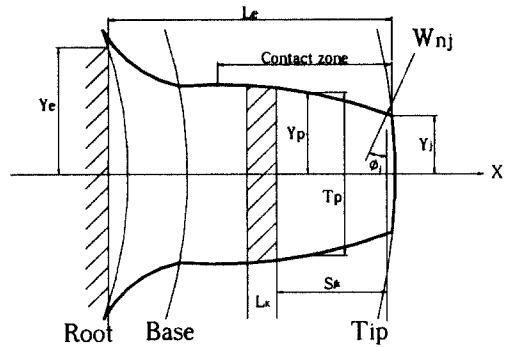


Fig.3 Tooth stiffness model.

기어의 치는 Fig.3과 같이 L_e 의 유효길이를 가진 외팔보로 가정한다. Fig.3에서와 같이 접촉구간에서 치를 사각형 단면의 연속된 횡단요소들로 나누고 각 부분의 두께는 L_k 로 표시한다. 여기에서 각부분의 세로방향의 양 끝 좌표는 치형좌표에서 계산된 값을 사용하고 각 부분에서의 높이, 단면적, 단면 2차 모멘트는 윗 단면과 아래 단면에서의 계산된 값들의 평균 값을 사용한다. 치의 전체 변형은 각 부분의 변형의 합으로써 구하고 각 부분의 변형은 각부분의 왼쪽 면을 고정단으로 하고 오른쪽 면에 인접한 치의 나머지를 강체 돌출부로 하는 보로 가정하여 구한다. 치에 가해진 하중을 힘과 모멘트의 등가계로 환산하여 외팔보에 가하면 하중점에서의 굽힘에 의한 변형은 다음 식으로 주어진다.

$$(D_j)_a = \frac{W_{nj}}{E_e I_k} [\cos^2 \phi_j \sum_k L_k (L_k^2 + 3S_{jk}L_k + S_{jk}^2)/3 - \cos \phi_j \sin \phi_j Y_j \sum_k L_k (L_k + 2S_{jk}) + \sin^2 \phi_j Y_j^2 \sum_k L_k] \quad (2)$$

여기서 E_e 는 치의 크기에 따라 그 값이 변하는 유효탄성계수이며 넓은 치인 $R = F/T_p > 5$ 인 경우 평면 변형 이론을 적용하여 $E_e = E/(1-\nu^2)$ 로 사용하고 $R < 5$ 인 좁은 치인 경우에는 평면응력 이론을 적용하여 $E_e = E$ 를 사용한다.

기어에서 전단변형은 전체 하중의 횡방향 성분 $W_{nj} \cos \phi_j$ 에 의해 발생한다. 이 변형은 횡단면을 회전

시키지 않고 중심선 만을 이동시키는 역할을 한다. 그 때 하중점에서의 변형은 각 부분 변형의 합이 되고 다음 거리만큼 중심선을 이동시킨다.

$$(D_j)_b = (1.2W_{nj} \cos^2 \phi_j / G) \sum_k L_k / A_k \quad (3)$$

지금까지 외팔보 이론을 적용하여 치 변형을 계산할 때 치는 강체로 된 기초 위에 고정되어 있다고 가정하였다. 그러나 필렛 기하학과 치를 지지하는 부위의 유연성 때문에 강체로 가정된 치가 지지부위에서 회전하는 양만큼 변형이 더해진다. 이러한 치의 회전을 일으키는 모멘트는 $W_{nj} \cos \phi_j S_j$, 와 이 회전의 반대 방향으로의 $W_{nj} \sin \phi_j Y_j$ 이다. 이 모멘트에 의해서 치의 지지부위에서 치의 회전에 의한 변형은 다음과 같이 구해진다.

$$(D_j)_c = 1.327W_{nj}(\cos \phi_j S_j - \sin \phi_j Y_j)^2 / (E_e Y_e^2 F) \quad (4)$$

접촉부의 접촉 캠플라이언스는 Palmgren에 의해 개발된 반경형식에 근거한 식을 전체 하중에 대해 평균하면 다음 식으로 주어진다.

$$(Q)_b = 1.37 / (E_{el2}^{0.9} F_{12}^{0.8} W_n^{0.1}) \quad (5)$$

이러한 치의 강성은 앞서 구한 변형식을 이용하여 j 번째의 계산점에서 외팔보에 의한 치의 강성은 W_{nj} / D_j 로 계산되고 맞물리는 기어쌍 전체 강성은 위의 모든 강성을 더함으로써 구해진다.

Cai (1994)에 의하면 이러한 비선형 미분 방정식은 공진 점을 제외하고 큰 오차없이 선형화된 미분 방정식으로 변환된다고 보고하였다. 그러므로 이 해석에서는 다음과 같이 선형화된 식이 사용된다.

$$M\ddot{x} + 2\xi_c \sqrt{Mk}\dot{x} + kx = \bar{k}y(t) \quad (6)$$

where

$$y(t) = \frac{W + F(t, x)}{k(t, x)},$$

\bar{k} = The average of mesh stiffness

이 선형화된 식을 표준화를 하면 다음과 같이 된다.

$$\ddot{X} + 2\xi_c \omega_n \dot{X} + \omega_n^2 X = \omega_n^2 Y(t) \quad (7)$$

where

$$X = x / x_s, x_s = W / \bar{k}, \omega_n = \sqrt{\bar{k} / M}, Y(t) = y(t) / x_s$$

주기적인 가진함수 $Y(t)$ 는 다음과 같이 조화함수에 의하여 표현된다.

$$Y(t) = Y_o + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \sin(i\omega t + \phi_i) \quad (8)$$

조화 가진 함수에 대응하는 Eq.(7)의 정상상태 해는 다음과 같이 얻어진다.

$$X = Y_o + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_n^2 Y_i \sin(i\omega t + \phi_i - \varphi_i)}{\sqrt{(\omega_n^2 - (i\omega)^2)^2 + (2\xi_c \omega_n i\omega)^2}} \quad (9)$$

기어의 진동은 감쇠력과 맞물림 강성에 의해 축에 전달되므로 축에 가해지는 힘은 다음과 같이 주어진다.

$$F_x = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{k} Y_i \sqrt{(2\xi_c \omega_n i\omega)^2 + \omega_n^4} \sin(i\omega t + \phi_i - \varphi_o) x_s + \bar{k} Y_o x_s \quad (10)$$

이 힘은 플레이트에 r 방향과 θ 방향 모멘트 입력을 줄 수 있도록 플레이트 중심에 원점을 둔 원통 좌표계에서 반경성분과 접선성분으로 나눈다.

2.2 보

베르눌리 오일러 보의 지배방정식으로부터 스펙트럴 법으로 유도된 입력측과 출력측의 변위, 각도, 모멘트, 힘을 연결하는 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} F_t \\ M_x \\ \theta_t \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ M_0 \\ \theta_0 \\ w_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서 전달함수의 성분은 박(1999)의 논문에서 언급되어 있다.

보에 입력된 힘 $|F_t| \cos(\theta_o - \theta_p)$ 은 전달함수에서 출력측 회전방향 모멘트 M_0 를 주고 입력된 힘이

$|F_r| \sin(\theta_r - \theta_p)$ 일 때 출력축 반경 방향 모멘트 M_r 를 준다. 여기서 θ_p 는 기어의 맞물림 압력각이고 θ_r 는 플레이트 상에 모멘트가 가해지는 점의 각도이다.

2.2 M_r 과 M_θ 에 의한 원형 플레이트의 진동

모멘트 M_r 에 의한 진동은 반경방향의 우력에 의한 플레이트 변위를 합하여 극한을 취하여 구하며 상세한 유도과정은 박(1999)의 논문에 언급되어 있고 결과는 다음식으로 주어진다.

$$w(r, \theta, t) = M_r \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dH_{mn}(\beta_{mn}r)}{dr} \Big|_{r=r_0} \times \frac{H_{mn}(\beta_{mn}r) \cos(m\theta - m\theta_0)}{\epsilon \pi a^2 (\omega_{mn}^2 - \omega^2) \Lambda_{mn}} e^{i\omega t} \quad (12)$$

where

$$\frac{dH_{mn}(\beta_{mn}r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = \left[\frac{dJ(\beta_{mn}r)}{dr} - \frac{J_m(\beta_{mn}r)}{I_m(\beta_{mn}r)} \frac{dI_m(\beta_{mn}r)}{dr} \right]_{r=r_0}$$

또한 모멘트 M_θ 에 의한 진동도 회전 방향의 우력의 변위들의 합으로 각도의 극한을 취하여 구하며 다음식으로 주어진다.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{mM_\theta}{r_0} \right) \frac{H_{mn}(\beta_{mn}r_0) H_{mn}(\beta_{mn}r)}{\epsilon \pi a^2 (\omega_{mn}^2 - \omega^2) \Lambda_{mn}} \times \sin(m\theta - m\theta_0) e^{i\omega t} \quad (13)$$

2.3 M_r 과 M_θ 에 의한 원형 플레이트의 음압

모멘트 M_r 에 의한 베플에 설치된 원형 플레이트의 음압을 계산하기 위하여 플레이트 면의 속도를 레일리 적분에 적용하고 베셀함수의 원리를 이용하여 정리하면 원거리 음장과 구면 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$p(R, \theta', \alpha, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i^m \omega^2 \rho_0}{R} \frac{dH_{mn}(\beta_{mn}r)}{dr} \Big|_{r=r_0} \times \frac{M_r}{\epsilon \pi a^2 (\omega_{mn}^2 - \omega^2) \Lambda_{mn}} \cos(m\theta' - m\theta_0) \Delta e^{i(\omega t - k_0 R)} \quad (14)$$

where

k_o = wave number in air

ρ_o = air density

$$\Delta = \int_0^1 H_{mn}(\beta_{mn}ua) J_m(k_0 au \sin \alpha) u du$$

M_θ 에 의한 음압도 M_r 에 의한 모멘트와 같은 방법으로 면의 속도를 Eq.(13)에서 구하고 그것을 레일리 적분에 대입하여 베셀 함수의 원리를 이용하면 (McLachlan, 1955) 다음과 같이 구해진다.

$$p(R, \theta', \alpha, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{mM_\theta}{r_0} \right) \frac{-i^m \omega^2 \rho_0}{\epsilon \pi R} \times \frac{H_{mn}(\beta_{mn}r_0)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \Lambda_{mn}} \sin(m\theta' - m\theta_0) \Delta e^{i(\omega t - k_0 R)} \quad (15)$$

3. 해석결과 및 토의

수치예제를 위하여 Table1과 같은 강제 스퍼기 어를 이용하였다. 또한 재질은 강이고 직경이 0.01m, 길이가 0.25m인 축을 사용하였고 반경이 0.05m, 두께 가 2.5mm인 알루미늄 원형 플레이트를 사용하여 축과 플레이트 중심에서 0.1m 떨어져서 결합되어 있다고 하였다. 플레이트로부터 방사되는 음향 매질은 공기이다.

Table 1 Spur gear specification

	Pinion	Gear
Number of teeth	20	31
Add. mod. coef.	0.4975	0.4725
Module	2	
Pressure angle(deg)	20°	
Clearance(mm)	0.7	
Face width(mm)	27	27
Cutter radius(mm)	0.75	0.75
Base radius(mm)	18.794	29.13

Table 1에 주어진 기어사양에 의하여 계산된 기어 치의 강성은 Fig.4와 같다. 이 계산에서 기어 치형은 진 인벌류트 곡선이라고 가정하고 0.07의 감쇠계수를 사용하였다. 이 강성과 감쇠계수를 사용하여 기어 진

동의 운동방정식이 계산되고 축에 전달된 힘이 주파수 영역에서 Fig.5 와 같이 계산되었다. 이 힘은 각 성분이 플레이트에 r 방향 성분과 θ 방향 모멘트 가진을 줄 수 있도록 두 성분으로 나누어 진다. Figure 6 은 플레이트에 전달된 모멘트 성분이다. 이 그림에서 축력과 관련된 피크를 발견할 수 없다. 이것은 이 축 시스템이 외팔보 형태이므로 축의 공진근처의 모멘트는 기어 공진과 관련된 축의 입력 하중보다 더 현저하기 때문이라 사료된다. 축의 현실적인 감쇠계수가 도입되더라도 같은 현상이 일어날 것이라 사료된다. 외팔보 형태의 축 시스템에서 기어 접촉은 기어 양 쪽이 축으로 지지된 경우와 다르고 따라서 접촉에 기인한 치의 강성도 달라질 것이다. 그러나 축의 공진에 관련된 변위가 기어 공진에서의 변위보다 클 것이라 사료된다. 이러한 계의 더 상세한 해석은 차 후 연구될 예정이다.

플레이트의 진동과 음압을 계산하기 위하여 0 부터 160 Hz 까지 주파수 영역에서, 25 개의 모드($m=4$, $n=5$)가 사용되었다. 이 주파수 영역에서 플레이트는 음향파워를 비효과적으로 방출하지만 해석적인 예를 위하여 이 주파수 대역을 선정하였다(Beranek,1971).

플레이트 면의 진동과 플레이트에서 방사된 소음은 r 방향 모멘트와 θ 방향 모멘트에 의해 가진 각각의 결과의 벡터적인 합이다. Fig.7 의 상부과 하부는 각각 이 모멘트에 의해 가진되고 결과를 벡터적으로 합해서 반경 0.1m 와 $\theta=90^\circ$ 에서 계산된 플레이

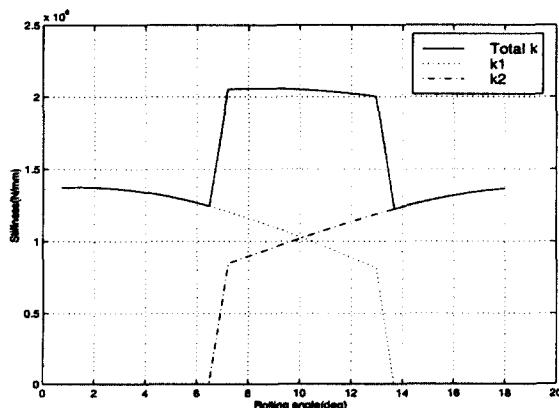


Fig.4 Mesh stiffness.

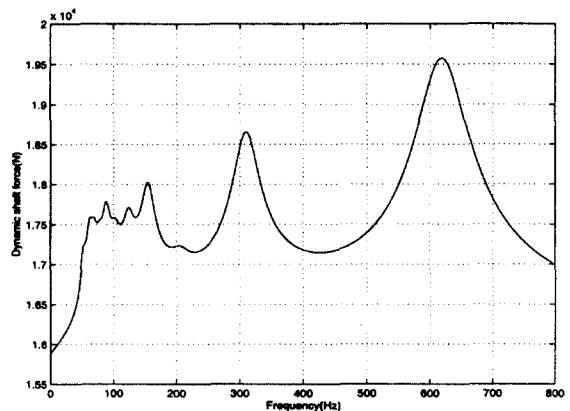


Fig.5 The force transmitted to the shaft by gear.

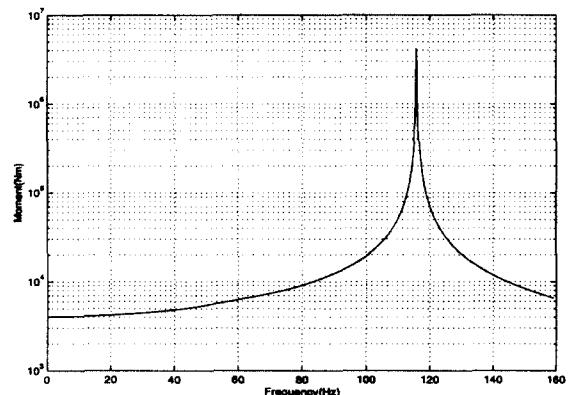


Fig.6 The total moment transmitted to the plate.

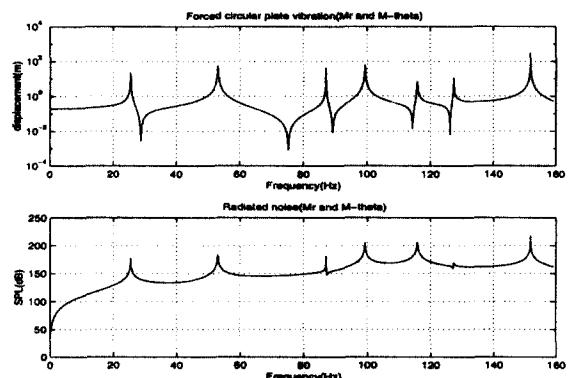


Fig.7 Plate vibration and radiated noise excited by all moments.

트의 진동 응답과 $R=2m$, $\alpha=45^\circ$ 과 $\theta=90^\circ$.에서 계산된 음압을 dB 로 표시한 것이다. 이 그림에서 플레이트의

공진과 관련된 모든 피크가 있고 특히 116Hz는 축에서 전달된 피크이다. 이러한 해석 기법은 하우징 모델의 단순성으로 인하여 완벽한 소음 예측을 줄 수 없지만 초기 설계시 설계자에게 하우징의 기본 두께나 재질 변경시의 진동, 소음의 특성을 쉽게 파악하게 할 수 있을 것으로 사료된다.

4. 결론 및 요약

스퍼 기어계로부터 소음을 예측하기 위하여 스퍼기어계의 단순화된 모델에 대해 연구하였다. 스퍼기어는 일자유도계 비선형 방정식으로부터 선형화된 운동방정식을 사용하여 모델링하고 축은 보로 모델링하여 스펙트럼법을 사용하여 전달함수를 구하였다. 하우징의 모델로써 배플에 설치된 고정된 원형 플레이트가 사용되었다. 축에서 플레이트에 전달된 성분중에 모멘트가 중요하고 이를 반경방향과 회전방향 성분으로 나누어서 계산하여 전체 플레이트 진동과 원거리 음장에서 음압을 계산하였다. 수치예제를 통하여 의팔보 형태의 기어계에 적용한 결과 공진영역에서 축의 진동이 기어의 진동보다 더 현저한 것을 알 수 있었다. 이러한 기법을 사용하여 초기 설계시 설계자에게 기본적인 진동 특성과 소음특성의 전반적인 경향을 줄 수 있다고 사료된다.

Engineers, 2nd ed. Oxford University, London.

6. Park, C.I. and Grosh, Karl, 1998, "Radiated Noise from a Clamped Circular Plate-Shaft System," ASME International Mechanical Engineering Congress, Recent Advances in Solids and Structures, Anaheim, CA , USA, pp.199-204.
7. Tavakoli, M.S. and Houser, D.R., 1986, "Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears," Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol.108, pp.86-95.
8. Cornell, R.W., 1981, "Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth," Journal of Mechanical Design, vol.103, pp.447-459.
9. 박찬일, 1992, "기어계의 하중전달 및 진동특성에 관한 연구," 박사학위논문, 서울대학교.
10. 박찬일, 1999, "전단력에 의한 보와 연결된 원형 플레이트의 방사소음," 한국소음 진동공학회 추계학술대회논문집, pp.809-814.

참고문헌

1. Beranek, L.L., 1971, "Noise and Vibration Control," McGraw-Hill, New York.
2. Cai, Y. and Hayashi, T., 1994, "The Linear Approximated Equation of Vibration of a Pair of Spur Gears(Theory and Experiment)," Journal of Mechanical Design, Vol.116, pp.558-564.
3. Jacobson, M.F. , Singh, R., and Oswald, F.B. 1996, "Acoustic Radiation Efficiency Models of a simple Gearbox," NASA TM-107226.
4. Lim, T. C. and Singh,R, 1991, "Statistical Energy Analysis of a Gearbox with Empasis on the Bearing Path," Noise Control Engineering Journal, Vol.37 No.2 pp.63-69.
5. McLachlan, N.W., 1955, Bessel Functions for