

다중입출력 확률계의 지능재료를 이용한

제어에 대한 실험적 연구

조경래, 김용관**, 오수영*, 허훈***, 박상태****

An Experimental Study on the Control of Stochastic Dynamic MIMO System using the Smart material

Kyoung Lae Cho*, Yong Gwan Kim**, Su Young Oh*, Hoon Heo***, Sang Tae Pak****

요약

외부로부터 불규칙 교란을 받는 동력학계에 대해 '허-확률 제어기법'을 이용하여 설계된 제어기의 성능을 수치모사를 통하여 검증하였다^{[5][6]}. 압전소자를 알루미늄 보에 부착하여 다중입출력의 복합재료보로 만들고, 기반에 불규칙한 외부교란을 받는계에 대한 모델링을 수행하였으며, Ito의 확률미분방정식과 F-P-K방정식을 이용하여 동적 모멘트 방정식을 유도하여 시스템의 확률영역에서의 특성을 알아보았다. 본 연구에서 제어기의 목표는 외부교란의 입력에 의해 발생하는 시스템의 모멘트 응답크기를 줄이는 방향으로 전개하였고, 확률영역에서의 MIMO PI제어기('허-확률 MIMO PI 제어기')를 설계하여 시간영역에서의 응답형태를 관찰하였다.

Abstract

For dynamic system under the external irregular disturbance, a performance of the controller designed by using of the 'Heo-stochastic control methodology' is investigated by simulations and experiments.

MIMO Flexible cantilever beam, sticked with piezoceramics used as a sensor and actuator, under the irregular disturbance at bottom is modelled in physical domain. Dynamic moment equation about the system is derived through both the Ito's stochastic differential equation and Fokker-Planck-Kolmogoroff equation and also system's characteristics in stochastic domain is analyzed.

In this study, the controller suppresses the amplitude of the system's moment response to the external disturbance. MIMO PI controller('Heo-stochastic MIMO PI controller') is designed in the stochastic domain and the response characteristics are investigated in the time domain

NOMENCLATURE

- * 고려대학교 제어계측공학과 석사과정
- ** 국방과학연구소,
- 고려대학교 제어계측공학과 박사과정
- *** 고려대학교 제어계측공학과 교수
- **** 인턴연구원

- δ : Dirac delta function
- ζ : damping ratio
- A_m : stochastic system matrix
- $B_z(t)$: Brownian precess of disturbance
- $B_v(t)$: Brownian precess of control force

\hat{B}_m : control gain matrix

Dz : power spectral density of disturbance

Dv : power spectral density of control signal

$M_{ij} = E[X_1^i X_2^j]$: moment

m : 3×1 dynamic moment vector

m_{01} : modal mean velocity

m_{10} : modal mean displacement

m_{02} : autocorrelation of modal velocity

m_{20} : autocorrelation of modal displacement

m_{11} : cross-correlation of modal displacement and modal velocity

P_m : base excitation gain matrix

$V(t)$: uncorrelated band limited white noise type control input with 0 mean and PSD D_V

y : 1st bending modal coordinate

$z(t)$: uncorrelated band limited white noise type base excitation input with 0 mean and PSD D_z

1. 서 론

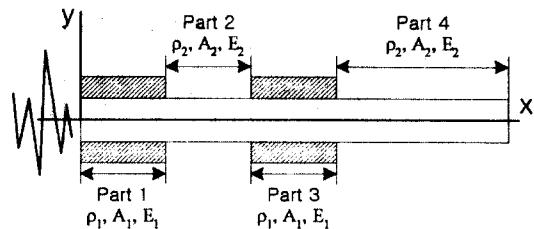
자연계에서 동적시스템들은 다양한 형태의 외부가진에 노출되어진다. 이 외부가진에 대해서 기존 SISO 확률제어기는 많이 다루어져 왔다^{[5][6]}. 본 논문을 통해, 이러한 불규칙한 외부가진을 받는 동적 시스템에 대하여 확률영역에서의 MIMO 제어기를 설계하였다.

또한 결정론적인계에서의 다중입출력문제는 많이 취급되었으나 확률영역에서의 다중입출력문제는 아직 전무하므로 이를 통하여 확률영역에서의 MIMO제어가 시간 영역의 실제계에 미치는 효과를 고찰하여 여러개의 확률제어입력의 효과에 대하여 실험적으로 연구하였다.

2. 시스템 방정식

본실험 연구에서 사용한 구조물은 알루미늄빔에 작동기와 감지기용의 압전소자(Piezoceramic)를 부착한 형태의 복합재료빔인바 이를 제어의 대상으

로 삼고자 한다^{[1][2]}. 이때 빔의 기저부분에 불규칙교란이 가해지게 되며 이의 개략적인 형상은 다음과 같다



[Fig.1] The Schematic of Composite Beam

복합재료빔의 운동방정식을 유도하기위한 여러 가지 방법중 가장 널리 쓰이고 있는 Hamilton의 법칙을 사용하여 다음(1)과 같은 빔의 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) \\ = -\rho A \frac{d^2}{dt^2} z(t) + c_p V(t) \delta'(x) \end{aligned} \quad (1)$$

$$V(t) \delta'(x) = [V_1(t) \delta'(x-a) + V_2(\delta'(x-l-a) - \delta'(x-l))]$$

한편 모달영역에서 실제물리계의 좌표는 (2)와 같은 두 개의 무한급수로 나타낼 수 있으며

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad (2)$$

이 때 공간좌표 x 만의 함수인 $\phi_i(x)$ 는 (3)의 경계조건을 만족해야한다^[2].

$$at x=0 : \begin{cases} \varphi_{i1}(0) = 0 \\ \frac{d\varphi_{i1}}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$at x=a : \begin{cases} \varphi_{i1}(a) = \varphi_{i2}(0) \\ \frac{d\varphi_{i1}}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d\varphi_{i2}}{dx} \Big|_{x=0} \\ E_1 I_1 \frac{d^2 \varphi_{i1}}{dx^2} \Big|_{x=a} = E_2 I_2 \frac{d^2 \varphi_{i2}}{dx^2} \Big|_{x=0} \\ E_1 I_1 \frac{d^3 \varphi_{i1}}{dx^3} \Big|_{x=a} = E_2 I_2 \frac{d^3 \varphi_{i2}}{dx^3} \Big|_{x=0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \text{at } x = l : \left[\begin{array}{l} \varphi_{i2}(l-a) = \varphi_{i3}(0) \\ \frac{d\varphi_{i2}}{dx} \Big|_{x=l-a} = \frac{d\varphi_{i3}}{dx} \Big|_{x=0} \\ E_2 I_2 \frac{d^2 \varphi_{i2}}{dx^2} \Big|_{x=l-a} = E_1 I_1 \frac{d^2 \varphi_{i3}}{dx^2} \Big|_{x=0} \\ E_2 I_2 \frac{d^3 \varphi_{i2}}{dx^3} \Big|_{x=l-a} = E_1 I_1 \frac{d^3 \varphi_{i3}}{dx^3} \Big|_{x=0} \end{array} \right] \\
& x = l+a : \left[\begin{array}{l} \varphi_{i3}(a) = \varphi_{i4}(0) \\ \frac{d\varphi_{i3}}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d\varphi_{i4}}{dx} \Big|_{x=0} \\ E_1 I_1 \frac{d^2 \varphi_{i3}}{dx^2} \Big|_{x=a} = E_2 I_2 \frac{d^2 \varphi_{i4}}{dx^2} \Big|_{x=0} \\ E_1 I_1 \frac{d^3 \varphi_{i3}}{dx^3} \Big|_{x=a} = E_2 I_2 \frac{d^3 \varphi_{i4}}{dx^3} \Big|_{x=0} \end{array} \right] \\
& \text{at } x = L : \left[\begin{array}{l} \frac{d^2 \varphi_{i4}}{dx^2} \Big|_{x=L-l-a} = 0 \\ \frac{d^3 \varphi_{i4}}{dx^3} \Big|_{x=L-l-a} = 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

위의 경계조건을 만족하는 첫 번째 모드 형상 함수는 (4)와 같은 형식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
\phi_i(x) &= A_1 \sinh(\lambda_i x) - A_2 \cosh(\lambda_i x) \\
&+ A_3 \sin(\lambda_i x) + A_4 \cos(\lambda_i x) \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{4}$$

이제 식 (1)을 제어이론에 적합한 상미분 방정식으로 근사하기 위해 모드형 함수를 가중치로 선택하는 Galerkin의 기법을 적용하고

$$\begin{aligned}
(\phi_i(t), R) &= \int_0^L \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[\rho A \phi_j(x) \phi_j(x) \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} \right. \right. \\
&+ EI \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} \phi_j(x) q_j(t) \left. \right] + \rho A \phi_i(t) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\
&\left. \phi_i(t) c_p V(t) \delta'(x) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

이를 적분하면 (6)과 같다.

$$[\mathbf{M}] \ddot{q}_i(t) + [\mathbf{K}] q_i(t) = [\bar{\mathbf{P}}] \dot{z}(t) + [\bar{\mathbf{B}}] V(t) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
M_{ii} &= \rho_1 A_1 \int_0^a \varphi_{i1}(x) \varphi_{1i}(x) dx \\
&+ \rho_2 A_2 \int_0^{l-a} \varphi_{i2}(x) \varphi_{2i}(x) dx \\
&+ \rho_1 A_1 \int_0^a \varphi_{i3}(x) \varphi_{3i}(x) dx \\
&+ \rho_2 A_2 \int_0^{L-l-a} \varphi_{i2}(x) \varphi_{2i}(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= E_1 I_1 \int_0^a \varphi_{i1}''(x) \varphi_{1j}''(x) dx \\
&+ E_2 I_2 \int_0^{l-a} \varphi_{i2}''(x) \varphi_{2j}''(x) dx \\
&+ E_1 I_1 \int_0^a \varphi_{i3}''(x) \varphi_{3j}''(x) dx \\
&+ E_2 I_2 \int_0^{L-l-a} \varphi_{i4}''(x) \varphi_{4j}''(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{P}_i &= -\rho_1 A_1 \int_0^a \varphi_{i1}(x) dx \\
&- \rho_2 A_2 \int_0^{l-a} \varphi_{i2}(x) dx \\
&- \rho_1 A_1 \int_0^a \varphi_{i3}(x) dx \\
&- \rho_2 A_2 \int_0^{L-l-a} \varphi_{i4}(x) dx
\end{aligned}$$

$$\bar{B}_{ii} = c_p \frac{d}{dx} \varphi_i(a)$$

$$\bar{B}_{ii} = c_p \left(\frac{d}{dx} \varphi_i(l+a) - \frac{d}{dx} \varphi_i(a) \right)$$

식[6]은 다음과 같이 고유주파수의 항으로 표현되는 모달방정식으로 쓸 수 있다.

$$\ddot{y}_i + 2\xi \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = p_i \eta(t) + b_i V(t) \tag{7}$$

여기서 $\eta(t)$: 평균 0, uncorrelated, Gaussian 형태의 백색잡음 기저가진입력

$V(t)$: 평균 0, uncorrelated, Gaussian 형태의 백색잡음 제어입력

백색잡음은 브라운(Brown) 운동의 미분형태로 나타날 수 있다. 또한 다음과 같은 특성을 갖는 뷔너(Wiener) 과정으로 가정한다.

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= \frac{dB_\eta(t)}{dt} \\ E[dB_\eta^2(t)] &= 2\pi D_\eta \Delta t \\ V(t) &= \frac{dB_V(t)}{dt} \\ E[dB_V^2(t)] &= 2\pi D_V \Delta t\end{aligned}\tag{8}$$

여기서 $B_\eta(t)$ 와 $B_V(t)$: 브라운운동 과정
 D_η 와 D_V : PSD (power spectral density)를 말한다.

Ito 확률미분방정식과 F-P-K방정식을 이용하여 확률영역에서의 (9)와 같은 지배방적식을 구할수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{m}_{i_{10}} &= m_{i_{01}} \\ \dot{m}_{i_{01}} &= -\omega_i^2 m_{i_{10}} - 2\xi\omega_i m_{i_{11}} \\ \dot{m}_{i_{20}} &= 2m_{i_{11}} \\ \dot{m}_{i_{11}} &= -\omega_i^2 m_{i_{20}} - 2\xi\omega_i m_{i_{10}} + m_{i_{02}} \\ \dot{m}_{i_{02}} &= -2\xi\omega_i m_{i_{11}} \\ &\quad + 2\pi(p^2 D_\eta + b^2 D_V)\end{aligned}\tag{9}$$

여기서 $M_{ij} : E[X_1^i X_2^j]$

위 식을 matrix 형태로 간략화하면

$$\dot{m}_i = A_m m_i + P_m D_\eta + B_m D_V \tag{10}$$

$i = 1, 2$

여기서 A_m : system matrix
 P_m : 기저 외란 항
 B_m : 제어입력
 D_η : 인가된 외란의 PSD
 D_V : 제어입력의 PSD

3. Degree of Controllability

확률영역에서의 가제어성(Controllability)과 가관측성(Observability)은 실 물리영역에서의 가제어성과 가관측성과 같은 성질을 가지고 있음을 기존논문에서 이미 확인되었다.^[5] 그러므로 본 논문에서는 다중입출력계의 가제어성을 정량적으로 확인하

여 이것이 제어에 어떤 영향을 미치는가를 확인 하 고자 한다.^[4]

Controllability grammian W_c 는 다음과 같다

$$W_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \tag{11}$$

W_c 를 이용하여 System의 Actuator 조건에 따른 Controllability를 정량적으로 측정할 수 있다.

이를 이용하여 SISO Controller와 MIMO Controller의 Actuator의 조건에 따른 Controllability를 구함으로써 효과적인 Actuator의 조건을 선정할 수 있겠다. 또 본학제제어기의 MIMO상황에서의 특성을 파악할 수 있겠다.

본 실험에서 사용된 계에서의 가제어성의 정도를 알기위한 W_c 의 Singular value는 $\sigma_1 = 0.9836$ $\sigma_2 = 0.8431$ 이고, 그리고 SISO Controller에 적용하였을때는 $\sigma_1 = 0.9527$ $\sigma_2 = 0.3511$ 의 값이 나왔다. 위의 값에서 보듯이 MIMO로 제어기를 사용하였을때가 SISO보다 제어성의 효과가 뛰어남을 알 수 있다.

4. 제어기 설계

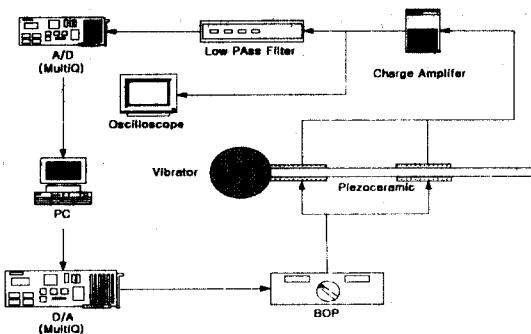
외란이 평균 0인 백색잡음으로 가정하였으므로 정상상태에서 1차 동적모멘트는 0으로 수렴한다. 제어기 설계는 다음과 같은 2차 동적모멘트만을 사용하여 설정한다. 그러므로 식(7)의 각 계수는 다음과 같은 행렬 값을 갖는다.

$$\begin{aligned}A_{m_i} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\omega_i^2 & -2\xi\omega_i & 1 \\ 0 & 0 & -2\xi\omega_i \end{bmatrix} \\ P_{m_i} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi p_i^2 \end{bmatrix}, \quad B_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi b_i^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

본 논문에서는 MIMO PI제어기를 사용하였고 각 모멘트에 대한 제어에 따른 시간영역의 응답형태를 관찰하고자 각 모멘트에 대한 PI 이득을 같은 값으로 사용하였다. 제어기의 목표는 입력된 PSD값의 외부교란에 의해 발생되는 시스템의 모멘

트 응답의 크기와 시간영역에서의 응답을 최소화하는 방향으로 전개되었고, SISO PI 제어기와 비교를 하여 MIMO PI제어기의 성능을 확인하는 방향으로 진행하였다.

5. 실험방법 및 결과



[Fig.2] The Schematic of Experiment setup

가진기(Shaker)에서 PSD가 0.05이고 60 Hz이하의 주파수 대역을 갖는 랜덤노이즈를 발생시키면 이는 연결된 복합재료빔의 기저부분에 전해져 빔을 진동시키게 된다. 빔에 부착된 피에조세라믹은 이러한 빔의 진동을 전압형태로 변환하여 신호를 발생시키게되고, 이 신호는 전하증폭기(Charge Amplifier)와 필터를 거쳐 아날로그-디지털 변환기(A/D Convertor)로 전해진다. PI제어기에서는 빔에 가해지는 외력을 PSD형태로 인지하여 이에 대한 제어입력을 확률영역에서의 PSD형태로 생성하고, 이는 다시 Monte -Carlo 기법에 의해 실제 물리영역에서의 제어입력으로 변환된다. 이론상으로는 이 제어 입력을 BOP를 통해 증폭하여 피에조세라믹에 가해줌으로서 빔의 진동을 억제하기 위한 물리력을 발휘하게된다. 본 논문에서는 위에서 기술한 바와 같이 제어입력을 얻고 이를 통해 off-line상태에서 빔의 진동을 제어하였다. 이의 해결을 위한 실시간제어 연구가 진행되고 있다.

6. 결 론

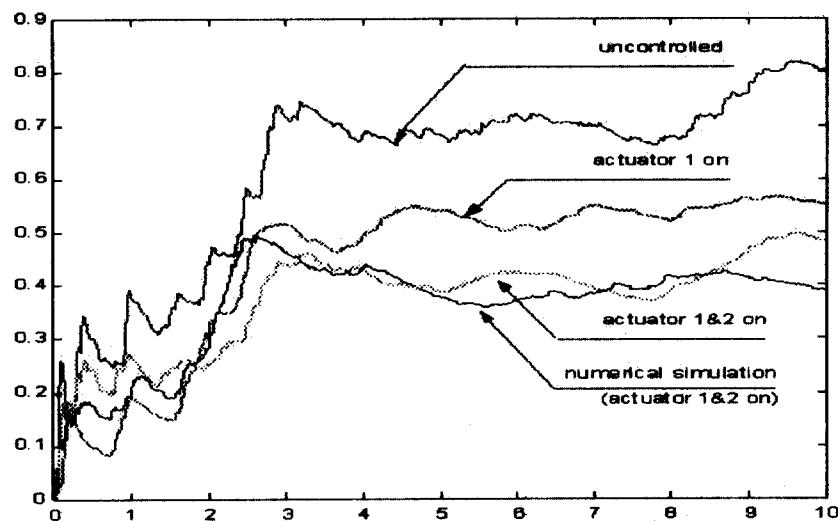
이상의 실험에서 두 개의 세라믹을 이용하여 작동기와 감지기로 사용할 경우 감지기의 응답이 작동기의 응답에 영향을 받는 문제가 발생한다. 이의

해결을 위해서는 감지기의 위치와 면적이 보다 효과적으로 구성된 보의 설계가 필요하다. 그리고 작동기의 위치에 따라 Controllability grammian의 정량적인 변화가 생기게 된다. 여기서는 값의 크기를 비교하여 MIMO와 SISO일때의 각각 제어기의 제어성을 알아보았다. 더 나가, 각각 작동기의 위치변화에 따른 가제어성의 수식적인 변화를 관찰할 필요가 있다.

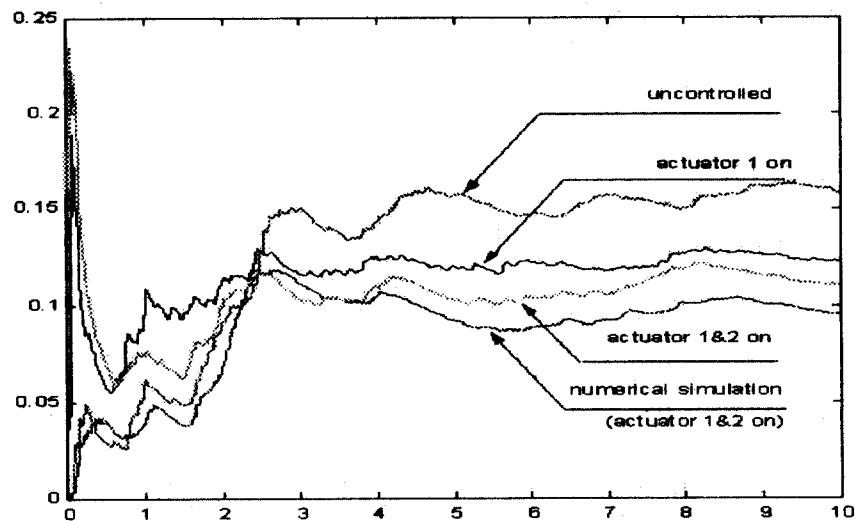
[Fig.3]과 [Fig.4]에서 보듯이 하나의 작동기를 작동하였을 때 비제어시보다 평균제곱응답이 적음을 알수 있고, 두 개의 작동기를 동시에 작동하였을때는 보다 성능이 우수함을 알수 있다. 그리고 각각의 작동기에는 적당한 비례를 초과하지 않는 범위에서 제어 입력을 분배해야 된다. 그렇지 않을 경우에는 구조물의 특성상 제어효과가 더 나빠지는 경우가 발생한다.

7. 참고문헌

- [1] Edward F. Crawly, Javier de Luis, "Use of Piezoceramic Actuators as Elements of Intelligent Structures", AIAA, Vol. 25, No 10, p1373-1385, 1987
- [2] Z. W. Jiang, "Position Control of a Flexible Arm Using Piezoelectric Bimorph Cells", Tohoku University.
- [3] William T. Thomsom, "Theory of Vibration with Applications", pp33.
- [4] Daniel J. Inman, "Vibration with Control, Measurement, and Stability", pp164.
- [5] 박상태, "허-확률제어기법'을 이용한 다중입출력 동력학계 제어에 대한 연구", 고려대학교, 석사학위논문, 2000
- [6] 허훈, 한정엽, 김대중, 조윤현, "확률영역에서의 제어기 (허-확률제어기:Heo-Stochastic Controller) 설계기법", 대한민국 특허출원 1999-17049 (1999.5.12)



[Fig.3] Mean square response of first sensor



[Fig.4] Mean square response of second sensor