

# 전기적 항복영역을 갖는 전왜균열에 대한 응력강도계수 계산

범현규(전남대 기계공학과), 정은도\* (전남대 대학원 기계공학과)

## Evaluation of Stress Intensity Factors for an Electrostrictive Crack with an Electric Yielding Zone

H. G. Beom(Mech. Eng. Dept. CNU), E. D. Jeong(Mech. Eng. Dept., CNU)

### ABSTRACT

A crack with electrically impermeable surfaces in an electrostrictive material subjected to uniform electric loading is analysed. A strip yield zone model is employed to investigate the effect of electric yielding on stress intensity factor. Complete forms of electric fields and elastic fields for the crack are derived by using complex function theory. The stress intensity factors are obtained based on the strip yield zone model.

**Key Words** : Electrostrictive material(전왜재료), Crack(균열), Electric field(전기장), Elastic field(탄성장), Complex function theory(복소함수이론), Insulating crack(절연균열), Strip yielding model(띠항복모델)

### 1. 서 론

전기-기계적 커플링 특성을 갖는 전왜재료는 센서(sensor) 및 액추에이터(actuator)등의 재료로 널리 이용되고 있다. 전왜재료에 전기장이 인가되면 개재물(inclusion)이나 내부전극(internal electrode)같은 결합 주위에 전기장이 집중된다. 집중된 전기장에 의한 부적합 변형은 기하학적 적합방정식을 만족하지 않으므로, 이로 인하여 응력을 발생한다. 따라서, 개재물이나 내부전극 끝단 주위에 균열이 발생하기 쉽다. 전왜재료의 균열은 재료의 강도를 크게 저하시키므로 최근에 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.<sup>(1,2,3)</sup>

전기적 항복영역은 전기장이 인가된 전왜재료의 균열선단에 형성되며 전기장 및 탄성장의 거동에 중요한 역할을 한다. Gao 등<sup>(4)</sup>은 Dugdale모델<sup>(5)</sup>을 확장한 띠포화모델을 이용하여 압전재료(piezoelectric material) 내의 전기적항복을 하는 균열에 대한 에너지방출률(energy release rate)에 관해 연구하였고, Ru<sup>(6)</sup>는 띠포화모델을 이용하여 전기분극(electric polarization)에 의한 응력강도계수에서 포화분극의 영향에 대해서 연구하였다. 최근에 Beom<sup>(7)</sup>은 비선형 전왜재료 내부의 균열에 대한 응력특이성에 대하여 연구하였다. 그는 지배적인 균열선단장에서 응력특이성이  $r^{-1/2}$  이고 그 크기는 응력강도계수로 특성지워짐을 보였다. 또한, 그는 소규모 비선형 조

건에서 응력강도계수는 전기장강도계수와 관련이 있다는 것을 보였다.<sup>(8)</sup>

본 연구의 목적은 전기장이 인가될 때 전왜재료에서 전기적으로 절연된 표면(impermeable surface)을 가지는 균열의 문제를 해석하는 것이다. 절연균열에 대한 전기장과 탄성장의 완전한 형태는 복소함수이론을 이용하여 유도하였다. 띠항복모델을 이용하여 응력강도계수에서 전기적 항복의 영향을 연구한다.

### 2. 문제의 수식화

무한대에서 균일한 전기장  $E_0^{\infty}$  를 받는 전왜재료 내에 간격  $(-a, a)$ 로 놓여 있는 균열의 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 전왜재료의 외부 경계면에 기계적인 하중은 작용하지 않는다. 균열면에서 트랙션은 없고 전기적으로 절연된다고 가정한다. 여기서 변위와 전기포텐셜의 면내성분은 면내 Cartesian좌표  $x_1, x_2$ 에만 관련된다. 평면변형을 조건에서, 선형 등방성 전왜재료의 구성 방정식은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\gamma_{ij} = \frac{1+\nu}{Y}(\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}) + Q(1+q)D_i D_j - Qq(1+\nu)D_k D_k \delta_{ij}$$

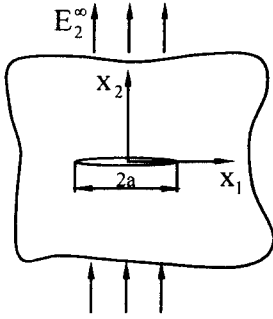


Fig. 1 Crack in an electrostrictive ceramic under electric loading.

$$D_i = \epsilon E_i \quad (1)$$

여기서  $\gamma_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$  와  $E_i$  는 각각 변형률, 응력, 전기변위(electric displacement), 전기장이다.  $\nu$  와  $\nu$  는 Young계수와 Poisson비이다.  $Q$  와  $q$  는 전왜계수,  $\epsilon$  은 유전율(permittivity),  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker 델타이다. 한 항에서 로마 하첨자의 반복은 점자의 범위 1에서 2까지의 합을 나타낸다. 전왜재료에 대한 응력과 전기변위는 다음 식을 만족한다.

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,j} = 0 \quad (2)$$

전기장과 변위의 일반적인 해는 식 (2)를 만족한다. 그리고, 응력과 합력은 해석함수(analytic function)를 이용하여 다음과 같이 표현된다.<sup>(9)</sup>

$$\begin{aligned} -E_1 + iE_2 &= \Omega'(z) \\ 2G(u_1 + iu_2) &= (3-4\nu)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ &\quad + S\Omega(z)\overline{\Omega'(z)} + T \int \Omega'(z)^2 dz \\ \frac{\sigma_{22} + \sigma_{11}}{2} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - S\overline{\Omega'(z)}\overline{\Omega'(z)} \\ \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} + i\sigma_{12} &= \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) - S\overline{\Omega''(z)}\overline{\Omega(z)} \\ F_1 + iF_2 &= -i\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} - S\overline{\Omega(z)}\overline{\Omega'(z)}\right] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $z = x_1 + ix_2$  이고 (')은 편각에 대한 미분을 의미한다.  $u_i$  는 변위,  $F_j$  ( $j=1,2$ ) 는 재료에 작용하는 합력(resultant force)의 성분이다.  $\Omega(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  는 해석함수이고 상첨자(¯)는 공액복소수를 의미한다. 상수  $G, S, T$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G &= \frac{Y}{2(1+\nu)}, \quad S = \frac{1-(1+2\nu)q}{4} \frac{Y}{1-\nu^2} \epsilon^2 Q, \\ T &= \frac{1+q}{2(1+\nu)} Y \epsilon^2 Q \end{aligned} \quad (4)$$

전왜재료 내부의 균열에 대한 해는 문제의 경계

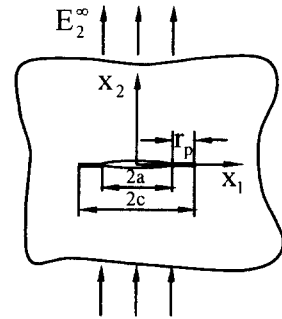


Fig. 2 Electrostrictive crack with a strip yield zone in an electrostrictive ceramic.

조건을 만족하는 함수  $\Omega(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$ 로 표현된다. 세 개의 복소함수가 결정되어지면 완전한 형태의 전기장과 탄성장은 식 (3)으로부터 얻을 수 있다.

### 3. 띠항복모델

Dugdale에 의해 제안된 띠항복모델을 이용하여 응력강도계수의 전기적 항복에 대한 영향을 조사한다. 띠항복 영역을 갖는 전왜재료를 Fig. 2에 나타내었다. 균열면과 무한대에서 전기적 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_2(x_1, 0) &= 0, \quad |x_1| < a \\ E_1 &= 0, \quad E_2 = E_2^\infty \quad \text{as } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5)$$

띠항복 영역의 경계조건은

$$D_2(x_1, 0) = D_0, \quad a < |x_1| < c \quad (6)$$

여기서  $a < |x_1| < c$  은 띠항복영역이다. 띠항복영역을 갖는 균열에 대한 전기장은 탄성-완전소성의 모드 III 균열의 해로부터 얻을 수 있다. 즉, 모드 III 하중이 작용할 경우의 응력은 전기변위로, 변위는 전기장으로 대체할 수 있다. 문제에 대한 전기장은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{2iE_0}{\pi} \left[ z \cot^{-1} \left( \frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - a \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) \right] \quad \text{for } \frac{a}{c} = \cos \left( \frac{\pi E_2^\infty}{2E_0} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$z=c$  에서  $K_2^E = 0$  을 이용하여 띠항복영역의 크기가 유도된다.  $E_2^\infty \ll E_0$  에서 띠항복영역의 크기  $r_p$  는 다음과 같다.

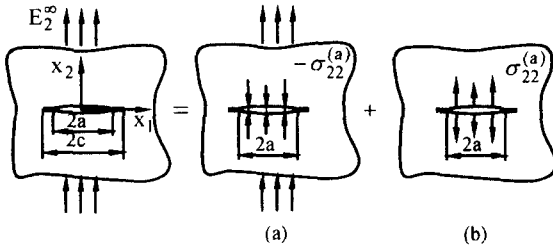


Fig. 3 Application of superposition to obtain the solution for a crack with the strip yield zone.

$$r_p = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_2^I}{E_0} \right)^2 \quad (8)$$

이제 락복 영역을 갖는 균열에 대한 탄성장의 해를 구해보자. 균열면과 락복 영역에서 기계적 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, 0) + i\sigma_{12}(x_1, 0) &= 0, \quad |x_1| < a \\ \sigma_{2j}(x_1, 0^+) &= \sigma_{2j}(x_1, 0^-) \\ u_j(x_1, 0^+) &= u_j(x_1, 0^-) \quad (j = 1, 2), \quad a < |x_1| < c \end{aligned} \quad (9)$$

Fig. 3과 같이 중첩법을 적용한다. 균열에 대한 복소함수의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi^{(a)}(z) + \varphi^{(b)}(z) \\ \psi(z) &= \psi^{(a)}(z) + \psi^{(b)}(z) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 괄호안의 상첨자  $a$ 와  $b$ 는 각각 문제 (a)와 (b)에 관련된 양이다. 문제 (a)의 절연균열 대한 복소함수의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi^{(a)}(z) &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ S(1-2\nu)(E_2^\infty)^2 + 2SE_2^\infty E_0 + T(E_2^\infty)^2 \right\} z(z) \\ &\quad + 2iE_0 S\Omega + (T-S)X(z) - \frac{1}{2\pi} \left\{ p + 2(1-\nu)f \right\} \ln \frac{z-a}{z+a} \\ \psi^{(a)}(z) &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ S[\Omega(z) - z\Omega'(z)] 2iE_0 - \Omega'(z) \right\} \\ &\quad + T[X(z) - zX'(z)] - \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} S[\Omega(z)\Omega'(z) - X(z)] \\ &\quad + \frac{p}{8\pi(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az}{z^2-a^2} \right] \\ &\quad + \frac{f}{4\pi} \left[ \ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az}{z^2-a^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

여기서

$$X(z) = \int \{\Omega'(z)\}^2 dz$$

$$\begin{aligned} p &= -\frac{16}{\pi} \frac{1-\nu}{1-2\nu} SE_0^2 a \ln \frac{a}{c} \\ f &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1-2\nu} SE_0^2 a \ln \frac{a}{c} \end{aligned} \quad (12)$$

이다.

띠포화모델에서 포텐셜에 의한 탄성장은 변위와 트랙션의 연속을 만족한다. 균열면의 응력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(a)} + i\sigma_{12}^{(a)} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ SE_2^\infty [(1-2\nu)E_2^\infty + 2E_0] + T(E_2^\infty)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ -(3-2\nu)S + T \right] \left[ \frac{2E_0}{\pi} \coth^{-1} \left( \frac{a}{x_1} \sqrt{\frac{c^2-x_1^2}{c^2-a^2}} \right) \right]^2 \\ &\quad - 2S \left( \frac{2E_0}{\pi} \right)^2 \frac{a^2}{a^2-x_1^2} \left\{ \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-x_1^2}} \left[ \frac{x_1}{a} \coth^{-1} \left( \frac{a}{x_1} \sqrt{\frac{c^2-x_1^2}{c^2-a^2}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \coth^{-1} \left( \sqrt{\frac{c^2-x_1^2}{c^2-a^2}} \right) \right] - \ln \frac{a}{c} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

문제 (b)의 복소해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi^{(b)}(z) &= -\frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_a^\infty \frac{\sigma_{22}^{(a)}(t)}{\chi^*(t)(t-z)} dt \\ \psi^{(b)}(z) &= \bar{\varphi}^{(b)}(z) - z\varphi^{(b)}(z) \quad \text{for } \chi(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}} \end{aligned} \quad (14)$$

균열의 오른쪽 선단에 대한 응력 강도 계수는 중첩에 의하여 다음과 같이 얻어진다.

$$K_I = K_I^{(a)} + K_I^{(b)} \quad (15)$$

여기서

$$K_I^{(a)} = 0, \quad K_I^{(b)} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_a^\infty \sigma_{22}^{(a)}(x_1) \sqrt{\frac{a+x_1}{a-x_1}} dx_1 \quad (16)$$

이다.

식(16)을 수치적분하면 응력강도계수를 얻을 수 있다. Fig. 4와 Fig. 5는 특정 상수  $\nu$ 와  $q$ 에서  $E_2^\infty/E_0$ 에 대한 응력강도계수를 나타내었다.

#### 4. 결론

균열한 전기장을 받는 전도체에서 전기적으로 절연되는 면을 가지는 균열을 해석하였다. 전기적 락복 영역은 전기장이 인가될 때 균열선단에서 형성된다. 절연균열에 대한 전기장과 탄성장의 완전한 해는 복소함수이론을 이용하여 유도하였다. 균열선단 근처에서 락복영역의 크기가 유도되었고,

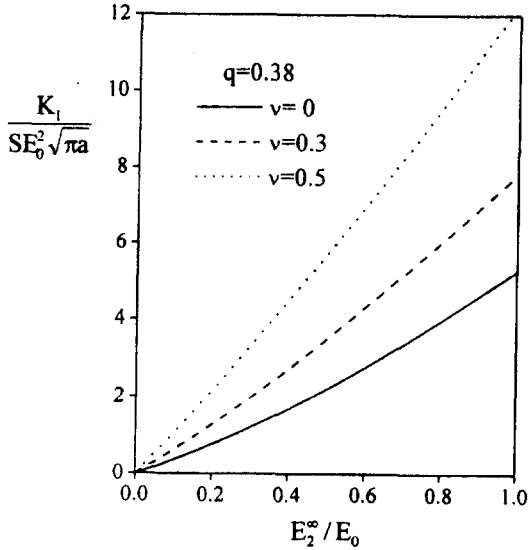


Fig. 4 Stress intensity factor as a function of  $E_2^* / E_0$ .

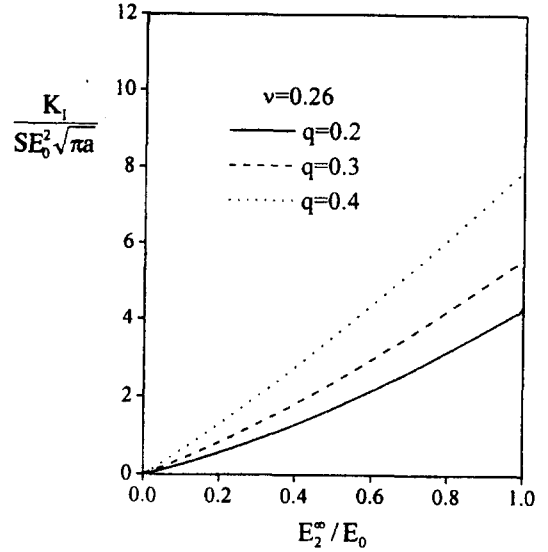


Fig. 5 Stress intensity factor as a function of  $E_2^* / E_0$ .

중첩법에 의해서 응력강도계수를 구하였다.

### 후 기

이 논문은 1998년도 한국학술진흥재단의 학술연구비에 의하여 지원되었으며, 이에 감사드립니다.

### 참고문헌

1. McMeeking, R. M., "On Mechanical Stresses at Cracks in Dielectric with Application to Dielectric Breakdown." *J. of Appl. Phys.* Vol 62, pp. 3116-3122, 1987.
2. Yang, W. and Suo, Z., "Cracking in Ceramic Actuators Caused by Electrostriction," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 42, pp. 649-663, 1994.
3. Hao, T. H., Gong, X. and Suo, Z., "Fracture Mechanics for the Design of Ceramic Multilayer Actuators," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 44, pp. 23-48, 1996.
4. Gao, H., Zhang T.-Y., and Tong, P., "Local and Global Energy Release Rates for an Electrically Yielded Crack in a Piezoelectric Ceramic," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, pp. 491-510, 1997.
5. Dugdale, D. S., "Yielding of Steel Sheets Containing Slits," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
6. Ru, C. Q., "Effect of electrical polarization saturation on stress intensity factors in a piezoelectric ceramic," *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 36, 869-883, 1999.
7. Beom, H. G., "Singular Behaviour Near a Crack Tip in an Electrostrictive Material," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 47, pp. 1027-1049, 1999.
8. Beom, H. G., "Small Scale Nonlinear Analysis of Electrostrictive Crack Problems," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 47, pp. 1379-1395, 1999.
9. Knops, R. J., "Two-Dimensional Electrostriction," *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 16, pp. 377-388, 1963.
10. Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Netherlands, 1963.