韓國精密工學會 2000年度 秋季學術大會論文集 pp.517~522 KSPE 00F117

유한요소법을 이용한 압축력으로 인한 균열 표면의 마찰접촉 해석

김방원*(전북대 대학원 기계공학과), 이기수(전북대 기계공학과)

Frictional Contact Analysis of the Compression-Induced Crack Surfaces using the Finite Element Method

B. W. Kim(Chonbuk Univ. Graduate School), K. S. Lee(Chonbuk Univ. Dept. of Mechanical Eng.)

ABSTRACT

When a body including a crack inside is subjected to the compressive forces, the crack is closed and sliding occurs on the crack surfaces. In this work, a subsurface crack subjected to a static or moving compressive load is analyzed with the finite element method considering friction on the crack surface. The friction on the crack surface is assumed to follow the Coulomb friction law. A numerical method based on the finite element method and iterative method is applied in this work. And the result is compared with the frictional contact of crack by ANSYS using contact 12 element. The numerical results of two methods are compared with the wellknown analytical solutions, and the accuracy of iterative method is checked..

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Coulomb friction law(쿨롱 마찰법칙), Iterative Method (반복계산법), Contact 12 Element(접촉 12 요소)

1. 서론

강철 바퀴 위륜과 레일, 로울러와 볼베어링, 캠과 종동부 등은 구름접촉을 일으켜 표면상에서 주기적인 접촉하중을 받게 된다. 이러한 접촉하중을 받는 표면에서는 피팅(pitting, 표면에서 일어나는 균열), 프레팅 또는 스폴링(fretting or spalling, 표면 아래에서 일어나는 균열) 등의 표면 침체를 일으킨다. 이때에 물체의 표면상에서의 하중에 따라 균열표면은 열리거나 또는 닫혀지고, 또한 서로 접촉하면서 미끄러지게 된다. 이러한 균열표면의 마찰 및 접촉현상은 기계부품의 마모(wear)에서 뿐만 아니라 금속의 소성가공 등에서 광범위하게 발생하고 있어 이에 대한 해석이 요구된다.

균일한 압축력과 집중하중을 받는 균열표면의 마찰접촉 해석은 물체 표면상에 적용된 하중의 방향, 균열표면상의 마찰계수 크기 그리고 정적하중, 동적하중 등 여러 조건을 가지고 이론적, 실험적 그리고 수치해석적인 방법을 사용하여 해석되고 있다. Melville[1]는 압축하는 집중하중을 줄 경우에 균열표면이 서로 접촉하며 미끄러질 때 응력확대계수는 마찰계수의 크기에 따라서 결정됨을 보여주었다.

Schmueser와 Comninou등[2]은 물체의 상면에 균일 분포하중을 주고, 접선방향으로 적용된 집중하중을 준 경우에 균열표면의 탄성층과 접착기면사이의 마찰적인 미끄럼을 다루는 방법을 이론식과 그래프로 표현하고 있다. 여기서 마찰은 쿨롱법칙(Coulomb's law)에 의해 수학적인 단순화로 가정하였으며 접선방향 하중의 크기는 균열표면이 미끄럼만이 일어나고 어떠한 분리도 일어나지 않는 하중크기로 제한하고 있다. Chang과 Comninou등[3]은 물체의 표면상을 정적으로 움직이는 수직하중을 고려하여 동적인 하중을 준 경우의 연구를 하고자 했다. 또한 Chang과 Sheppard등[4]은 균일한 수직압력과 수직방향 집중하중이 주어진 표면에 평행한 평면 크랙을 포함하는 반절평면(half-plane)에서의 탄성응력 영역에 대한 해를 고려하였다. 쿨롱마찰을 이용하여 하중비가 점점 증가함에 따른 균열표면의 미끄

럼, 고착범위를 알고자 하였다. 그러나, 하중비 ($\lambda = P/p_o a$)를 고려하여 식을 풀고자하여서 균일한 수직압력(p_o)이 0인 경우에 대해서는 적용하지 못하고 있다. Sheppard와 Barber등[5]은 표면상을 움직이는 수직 압축하중를 받는 표면에 평행한 짧은 접착기면을 가진 탄성 반-평면을 모델화하여 균열표면에서의 미끄럼과 고착이 일어나는 조건과 범위를 구하고자 하였다. 앞선 연구와는 달리 모드 II 응력확대계수를 무차원화하여 균열표면의 마찰접촉현상을 고려하였으며 마찰계수와 균열길이/균열깊이의 비를 변수로 한 특이한 적분공식(singular integral equation)이 사용되었다. 이상의 논문은 이론식을 만들어 균열표면의 마찰접촉을 해석하고자 하였다. 그러나, 이것은 복잡한 식을 가지고 수치해석적으로 풀어야 하는 어려움이 있다. 최근에는 이러한 마찰접촉 해석을 유한요소법을 이용하여 해석하고 있다. 마찰접촉 문제를 해석하는 방법으로는 Penalty method, Lagrange multiplier method 그리고 Mathematical programs등 여러 가지 해석방법이 있지만, 본 논문에서는 Lee[6]에 의해 제안된 접촉부에서 정확한 접촉력을 구하는 반복계산법을 사용하였다. 먼저, 균일한 압축력과 수직 집중하중을 받는 길이가 짧은 균열을 가진 모델과 균일한 압축력과 접선방향 집중하중을 받는 기다란 균열을 가진 모델을 Fortran 프로그램으로 작성하여 계산을 하고 같은 모델을 Workstation에 설치한 유한요소 상용프로그램인 ANSYS에서 해석을 하였다. 그래서, 작성된 Fortran 프로그램으로 계산한 값과 ANSYS에서 해석한 값을 여러 참고문헌 값과 비교하여 접촉문제 해석방법의 타당성을 검증하고자 하였다. 또한 ANSYS를 사용하여 이러한 균열표면의 마찰접촉현상을 가시화하여 해석하고자 하였다. 본 논문의 주요 목적은 아래와 같다.

① 반복계산법을 균열이 있는 평판에 적용하여 접촉부에서의 정확한 접촉해석을 한다.

② 2차원 탄성체로 물체를 가정하고 균열표면에서는 Coulomb 마찰법칙을 적용하여 본 논문의 반복계산법에 의한 계산과 상업용 유한요소 프로그램인 ANSYS에서의 계산 결과를 비교하여 본 논문의 계산방법의 정확도 및 타당성을 점검하고자 한다.

2. 기본 방정식 및 해법

2.1 접 촉(Contact)

두 물체가 서로 접촉하여 마찰 현상이 일어나는 경우의 문제 즉 마찰접촉 문제를 해석하는 것은 실용적인 공학분야의 문제에서 중요한 역할을 하고 있다. 여기서는 마찰 접촉 조건이 포함된 방정식을 효능적으로 풀기위해 제안된 반복계산법에 대해서 설명하고자 한다. 2차원 또는 축대칭인 두 탄성물체 A와 B가 마찰접촉을 한다고 생각하자. 이때 물체 A의 가능한 접촉표면상에서, 우리는 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\boldsymbol{u}^A = C^A \boldsymbol{p} + \boldsymbol{w}^A \tag{1}$$

여기서, **u**는 미지의 마찰접촉 힘과 규정된 외력 양쪽에 의한 변위를 말하고 **w**은 규정된 외력에 의해서만의 변위를 말한다. **p**는 마찰접촉력이다. 노드-노드 접촉으로 제한하여 서술하면 물체 B에 접촉 가능한 표면에서, 우리는 유사한 방정식을 얻는다.

$$\boldsymbol{u}^B = -C^B \boldsymbol{p} + \boldsymbol{w}^B \tag{2}$$

식(1)와 (2)으로 부터, 우리는 가능한 접촉쌍 사이에 상대적인 변위를 얻는다.

$$\boldsymbol{u}^A - \boldsymbol{u}^B = C\boldsymbol{p} + \boldsymbol{w}^A - \boldsymbol{w}^B \tag{3}$$

여기서, 행렬 C 는 힘에 대한 flexibility matrix이고 positive definite로서 아래와 같이 정의된다.

$$C = C^A + C^B \tag{4}$$

이들 두 물체의 접촉점의 초기(변형 전) 거리를 **d**라고 하면 변형 후의 상대위치 **s**는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u}^A - \boldsymbol{u}^B - \boldsymbol{d} \tag{5}$$

분리된 물체에 대해서 쿨롱의 마찰법칙을 적용시키는 경우, 2차원 또는 축대칭 물체들에 대해서 접촉가능한 점 i에 관한 마찰접촉 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & p_{in} \le 0 \\ & s_{in} \le 0 \\ & p_{in} = 0 \quad \text{if } s_{in} < 0 \\ & s_{it} = 0 \quad \text{if } |p_{it}| < \mu |p_{in}| \end{aligned} \tag{6}$$

여기서, μ는 마찰계수를 나타내고 하첨자 n과 t는 표면의 법선과 접선방향을 나타낸다.

접촉하는 표면에 대해서, 현재 틈새 s와 마찰접

촉력 p에 의해서 오차벡터를 정의하면 다음과 같다

$$
\begin{aligned}
v_{in} &= s_{in} \text{ if } p_{in} < 0 \text{ or } \text{ if } s_{in} > 0 \\
&= 0 \text{ if } p_{in} \geq 0 \text{ and } s_{in} \leq 0 \\
v_{it} &= s_{it} \text{ if } |p_{it}| < \mu |p_{in}| \\
&\quad or \text{ if } sign(p_{it}) = sign(s_{it}) \text{ and } \mu |p_{in}| > 0 \\
&= 0 \text{ if } |p_{it}| \geq \mu |p_{in}| \\
&\quad \text{and } sign(p_{it}) = -sign(s_{it}) \text{ or if } \mu |p_{in}| > 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

그러면 마찰접촉 조건 (6)은 다음의 조건을 만족시키면 만족된다.

$$
\begin{aligned}
& p_{in} \leq 0 \\
& |p_{it}| \leq \mu |p_{in}| \\
& v = 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

2.2 반복계산법(Iterative Scheme)

본 논문에서는 균열표면에서의 접촉력 p의 값을 반복계산법에 의하여 계산하여 모든 접촉 가능점에서의 오차벡터 v을 향하여 단조감소하게 만드는 방법을 사용한다. 즉 접촉력 p는 다음과 같은 반복계산법에 의하여 계산한다.

$$
\begin{aligned}
& \bar{p}^{j} = p^{j-1} - \alpha s^{j-1} \\
& p^{j}_{in} = \min(0,\ \bar{p}^{j}_{in}) \\
& p^{j}_{it} = sign(\bar{p}^{j}_{it}) \min(|\bar{p}^{j}_{it}|, \mu |p^{j}_{in}|) \\
& \quad \text{if } v^{j-1}_{it} = s^{j-1}_{it} \\
& \quad = sign(\bar{p}^{j}_{it}) \mu |p^{j}_{in}| \text{ if } v^{j-1}_{it} = 0 \neq s^{j-1}_{it}
\end{aligned} \tag{9}
$$

여기서, j는 반복계산의 카운터이고 α는 수렴 및 계산시간 절감을 위한 양의 상수로서 계산가속기법을 사용하지 않는 한 $1.9 / \| C \|_{\infty}$라고 정의하여 계산을 시작한다. 마찰 접촉력 **p**를 위 반복계산법에 의하여 계산하는 경우 식(7)에 의하여 정의된 오차벡터 v가 0이 되면 마찰접촉 조건 식(6)은 완전히 만족됨을 증명할 수 있으며 이러한 것에 대한 증명은 참고논문 Lee[6]에 자세히 설명되어 있다.

Fig. 1은 마찰접촉력 **p**를 구하기 위한 반복계산법에 대한 순서도이다.

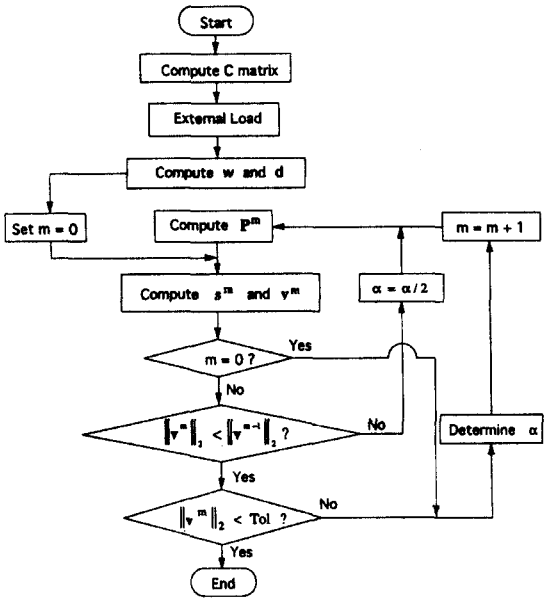

Fig. 1 Flow chart for the iteration scheme

3. 예제계산

균열표면의 마찰접촉 해석을 위해서 여러 학자들[1~6]은 물체의 표면에 정적인 균일한 압축력을 주고 집중하중을 가한 경우와 표면상을 움직이는 집중하중을 준 경우등 여러각도에서 해석을 하고자 하였다. 본 논문은 이러한 연구경향에서 대표적인 모델을 설정하여 유한요소법적인 마찰접촉 해석 즉 반복계산법을 이용하여 계산하고 같은 모델을 적용하여 ANSYS에서 해석하고자 하였다. 물체의 표면하중이 정적이냐 동적이냐와 집중하중이 접선방향이냐 수직방향이냐 그리고 균열의 길이 등을 고려하여 세 가지의 모델을 적용하여 해석하게 되었다. 각 예제에 적용되는 공통적인 가정은 다음과 같다.

① 재료들은 등방성이고 선형탄성이다.
② 무한요소 변형이론을 골격으로한 평면변형률(Plane strain) 상태로 가정한다.
③ 균열표면의 마찰은 쿨롱마찰로 가정한다.

3.1 균일한 압축하중과 수직방향 집중하중을 가한 경우

본 모델은 압축력이 작용하는 물체의 표면에 매우 가까이 균열이 존재하는 경우에 균열표면의 마찰접촉현상을 고려한 Chang와 Sheppard등[4]에 의해 계산된 모델로서 그 경계조건은 Fig. 2에 잘 나타나 있다. 균열길이 L은 탄성 반-평면(Half-plane)에 평행한 깊이 a에 위치한다. 압축하중 P와 균일압력

p_0 는 반평면의 표면에 적용되었다. 여기서 집중하중 P는 점 (0,a)에서 작용하도록 좌표계는 정의되었다. 여기서, 평판의 폭(W)은 200mm, 높이(H)는 100mm이며 균열길이(L)는 30mm이고 균열깊이(a)는 10mm로 정하여 해석하였다. FEM에서는 424개의 4절점요소를 사용했고 총 절점수는 505개이다. 그리고, 균열부분에서의 접촉가능한 절점수는 38개로서 정확한 계산을 위해서 세밀하게 메쉬했다. ANSYS에서는 총 543개의 절점수를 사용했으며, 접촉부분에 접촉강성(KN) 3.25e7 N/mm^2값을 가진Contact 12요소를 사용했다. 본 예제에 적용한 수치는 Table 1과 같다.

Table 1 The applied numerical values for example 1

Concentrated Load(P)	82.2 N
Uniform Pressure(p_0)	1.0 N/mm^2
Young's Modulus(E)	1.0e7 N/mm^2
Poisson's Ratio(ν)	0.3
Coefficient of Friction	0.5

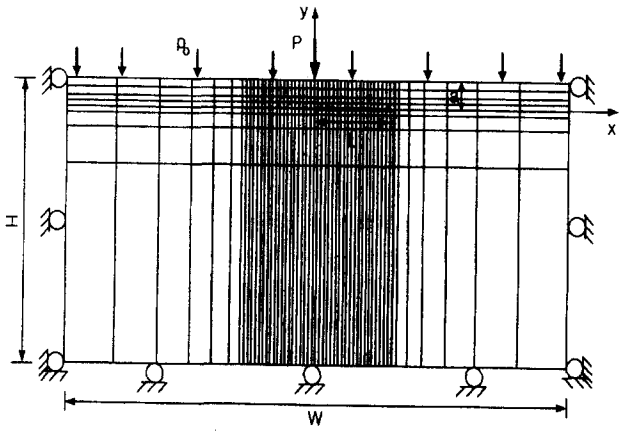

Fig. 2 The finite element model of example 1

Fig. 3은 예제 1에서 해석한 결과 균열표면에 위치한 절점에서의 접촉력을 반복계산법으로 구하여 균열면의 수직응력을 구해 Chang과 Sheppard등[4]이 해석한 이론값과 비교한 것이다. 미끄럼이 일어나는 지역은 x방향으로 6~16까지로 10mm범위인 것을 알게 된다. Fig. 4는 균열길이에 대해 균열면의 전단응력을 고려한 것이다. 쿨롱의 마찰법칙에 의해서 가정하였으므로 미끄럼지역은 Fig. 3의 해석값과 유사함을 알 수 있다. 즉, 하중이 충분히 클 때, 균열면에서는 미끄럼과 고착지역이 발생하고 있음을 알 수

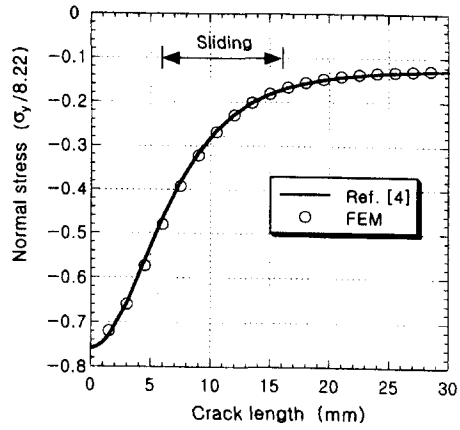

Fig. 3 Normal stress distribution on the crack surface of example 1 by the iterative scheme

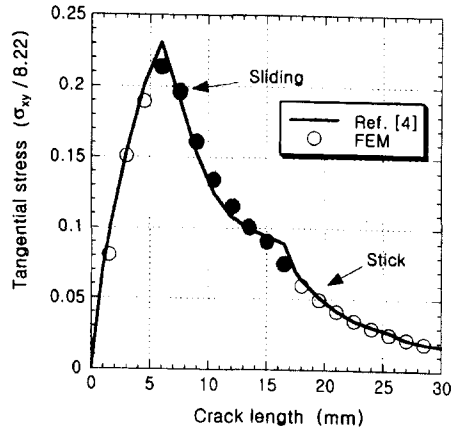

Fig. 4 Tangential stress distribution on the crack surface of example 1 by the iterative scheme

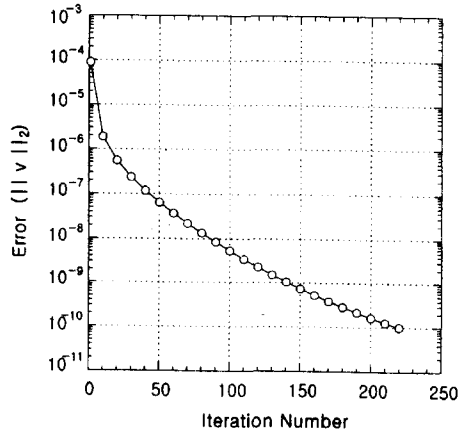

Fig. 5 Change of error norm of example 1

있다. Fig. 5는 본 해석에 이용된 반복계산법에서 오차노름의 수렴성을 반복횟수에 대해서 나타내고 있다. 반복횟수 m이 증가함에 따라 균열의 윗면과 아랫면의 오차노름은 점점 적어짐을 알 수 있다.

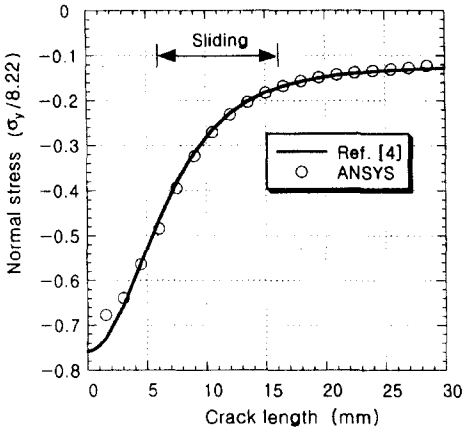

Fig. 6 Normal stress distribution on the crack surface of example 1 by ANSYS

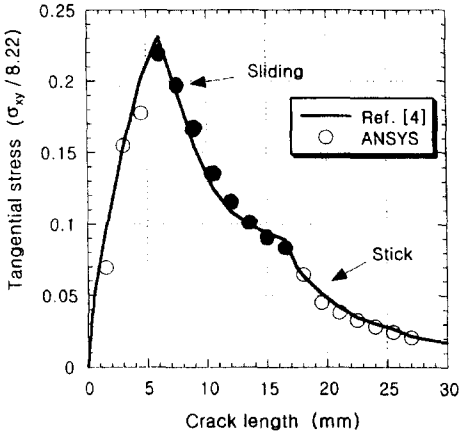

Fig. 7 Tangential stress distribution on the crack surface of example 1 by ANSYS

Fig. 6와 Fig. 7은 같은 모델에 대해 ANSYS에서 유한요소 모델링하여 해석한 결과이다. ANSYS에서 마찰접촉 해석을 위해서 사용된 방법은 Penalty method로서 접촉강성 KN값을 적용하여 해석하게 된다. 접촉요소(Contact 12)를 이용하여 접촉요소가 갖는 접촉력을 가지고 각 접촉노드에서의 응력값을 구하였다. Chang과 Sheppard등[4]이 해석한 값과 거의 같은 경향을 나타내며 균열의 6~16범위에서 미끄러짐 현상이 일어남을 알 수 있다.

3.2 균일한 압축하중과 접선방향 집중하중을 받는 균열표면의 마찰접촉해석

본 모델은 Schmueser와 Comninou등[2]이 해석한 모델로서 유한요소법, 즉 반복계산법으로 계산하기 위해서 설정되었다. Fig. 8은 본 모델에서의 경계조건을 보여준다. 좌표계의 설정과 경계조건 그리고 하중의 작용위치는 예제 1과 똑같다. 그리고 Schmueser 와 Comninou등[2]의 해석값과의 비교를 위해서 집중하중 Q는 균열표면이 미끄럼만이 일어나고 분리는 일어나지 않는 하중크기를 적용하였다.

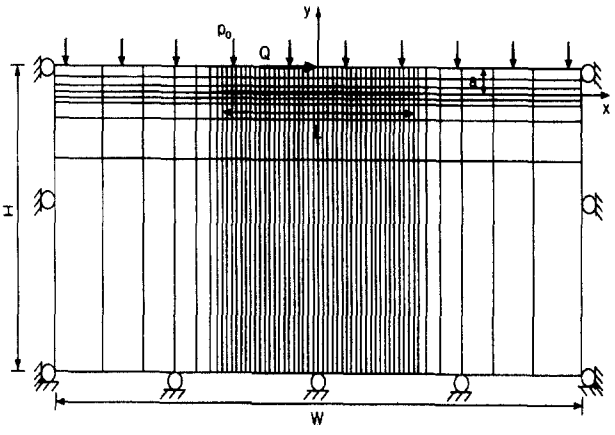

Fig. 8 The finite element model of example 2

균열길이 L은 80mm, 균열깊이 a는 10mm이고 평판의 높이 H는 100mm이고 폭 W은 220mm로 설정하여 해석하였다. FEM에서는 432개의 4절점요소를 사용했고 총 절점수는 534개이며 균열부분에서의 접촉가능한 절점수는 78개이다. ANSYS에서의 Contact 12요소에 적용된 접촉강성 KN값은 4.6e7

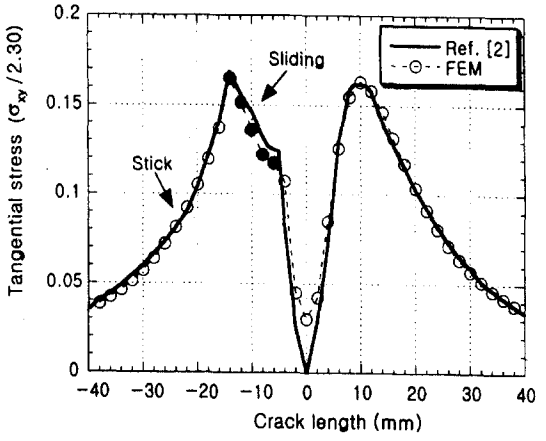

Fig. 9 Tangential stress distribution on the crack surface of example 2 by the iterative scheme

N/mm^2이다. 본 예제에 적용된 수치값은 예제 1과 같으며 접선방향 집중하중(Q)은 x축의 양의 방향으로 23N을 적용했다. Fig. 9는 반복계산법에 의해 균열길이가 80mm인 경우의 미끄럼 지역을 알고자 했다. 미끄럼은 하중의 작용 위치에서 뒷부분으로 -14~-6범위로 8mm인 것을 알 수 있다. 또한 다른 위치에서의 고착지역 응력값은 이론값과 일치함을 알 수 있다. 무차원화된 전단응력의 분포에서 미끄럼지역이 발생하는 부분의 그래프가 "갈고리(hook)" 모양의 불연속성을 나타내고 있음을 알 수 있다.

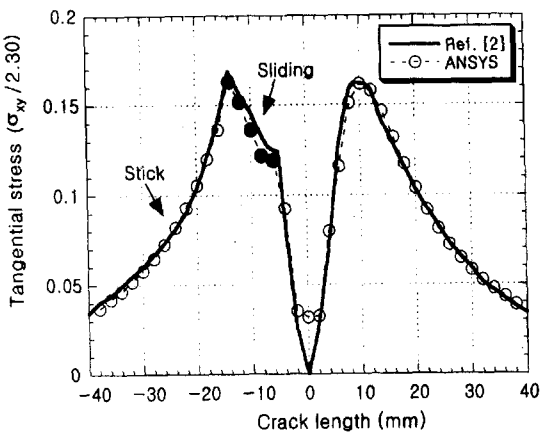

Fig. 10 Tangential stress distribution on the crack surface of example 2 by ANSYS

Fig. 10은 ANSYS에 대한 해석결과 값이다. 이론식의 해석값과 앞선 반복계산법의 해석값과도 같은 경향을 갖고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

이론식에 의해 해석되었던 물체의 표면하중에 따른 균열의 마찰접촉 해석을 본 논문은 유한요소 모델링을 하여 반복계산법과 ANSYS에서의 Penalty method를 적용하여 해석하였다. 물체의 표면하중은 다양하겠지만 본 논문의 해석방법의 타당성을 검증하는 입장에서 대표적으로 두 가지의 경우에 대해서 해석하였다. 그 결과는 다음과 같다.

① 균열의 마찰을 Coulomb 마찰로 가정한 2차원 탄성체의 표면에 정적인 균일한 압축력과 수직방향 집중하중을 가한 경우에 대해서 해석했을 때, 균열의 표면에서는 고착-미끄럼-고착의 마찰형상이 형성됨을 알 수 있었다. 이러한 형상은 ANSYS로 해석한 결과로 나타낸 균열의 변형형상에 잘 나타나 있다. Chang과 Sheppard등[4]은 이러한 형상을 복잡한 이론식으로 해석한 반면에 본 논문은 유한요소법적인 마찰접촉 해석을 통해 쉽게 계산할 수 있었다.

② 정적인 하중을 균열의 중간에 위치시키고 접선방향의 하중을 가한 모델에서는 미끄럼 지역이 하중의 뒷부분에서 일어남을 알았다.

③ 반복계산법을 적용할 때가 ANSYS에서 Contact 12요소를 사용한 경우보다 접촉력을 쉽고 빠르고 정확하게 구할 수가 있었다.

④ 본 논문의 해석결과들을 참고문헌과 유한요소 상용프로그램인 ANSYS의 해석결과와 비교해 볼 때 비교적 잘 일치했었다.

추후에 균열 부위에 균열선단(Crack Tip) 요소를 이용하여 균열의 갈라짐 각도를 예측하고, 균열의 굽어짐을 해석할 수 있으리라고 판단된다.

참고문헌

1. P. H. Melville, "Fracture Mechanics of Brittle Material in Compression", International Journal of Fracture, Vol. 13, pp.532- 534, 1977.
2. D. Schmueser, M. Comninou, and J. Dundurs, "Frictional Slip Between Layer and Substrate", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.107, pp.1103-1118, 1981.
3. F. K. Chang, M. Comninou, and J. R. Barber, "Slip between a Layer and a Substrate caused by a Normal Force Moving Steadily over the Surface", Int. Journal of Mechanical Sciences, Vol.25, No.11, pp.803-809, 1983.
4. F. K. Chang, M. Comninou, S. Sheppard, and J. R. Barber, "The Subsurface Crack Under Conditions of Slip and Stick Caused by a Surface Normal Force", Journal of Applied Mechanics, Vol.51, No.6, pp.311-316, 1984.
5. S. Sheppard, J. R. Barber, and M. Comninou, "Short Subsurface Cracks Under Conditions of Slip and Stick Caused by a Moving Compressive Load", Journal of Applied Mechanics, Vol.52, No.12, pp.811-817, 1985.
6. K. Lee, "An Efficient Solution Method For Frictional Contact Problems", Computers & Structures, Vol.32, No.1, p.1-11, 1989.