

스트링의 반발거동과 역학적 특성

김태용*(고려대 대학원 기계공학과), 박진무(고려대 기계공학과)

Restitution Behaviors and Mechanical Characteristics of Strings

Tae Yong Kim(Mech. Eng. Dept., Korea Univ.), Jin Moo Park(Mech. Eng. Dept., Korea Univ.)

ABSTRACT

Static and dynamic experiments were done to study on the restitution behaviors of strings. The elastic and viscoelastic model were compared. To apply a linear viscoelastic model (Kelvin model) to longitudinal behaviors of strings, static and dynamic tensile tests were done. Using their results, it should be intended to acquire damped stress (Stress related to velocity), and to calculate the viscoelastic coefficient. Fixing both ends, string was pushed by the loadcell attached to the tensile tester. The experimental results were in accordance with the calculated results using the Kelvin model acquired from the results of longitudinal tensile test. But the results of falling mass experiments, the behaviors of strings were near to elastic model. The clamping condition of strings in both sides has an effected on the value of COR. The smaller contact area, the grower the value of COR.

Key Words : Restitution behavior(반발거동), COR(반발계수), Elastic model(탄성모델), Viscoelastic model(점탄성 모델)

1. 서론

스트링 요소는 사용 용도에 따라서 활과 같이 변형에 대한 복원 특성이 이용되거나, 현악기의 현과 같이 장력에 따라서 충격에 대한 다양한 진동 특성이 이용되기도 하고, 라켓과 같이 일정한 장력이 걸려 있을 때 동적 반발 특성이 이용되기도 한다.

K.K.DEB⁽¹⁾는 양 끝단이 고정된 스트링에 임의의 점에 탄성해머로 축방향 가진을 시켰을 때 스트링의 진동을 이론적으로 해석했고, 해머와 스트링의 접촉동안 스트링에 의해서 해머로 전달되는 힘을 헤비사이드 전개법 (Heaviside's expansion theorem)을 이용하여 얻었다. KANDA⁽²⁾와 TAKATSUKA는 유한 요소 해석 방법을 이용하여 고정된 라켓 헤드 부분에서 공과 라켓의 충돌 거동을 알아보고, 공의 변형 형상과, 충돌 속도의 변화에 따른 반발 계수의 변화를 계산하였다.

본 연구에서는 복원 거동 및 반발 거동에 대한 스트링의 역학적 특성을 알아보고자 자일론-티타늄의 복합재료(스트링A)와, 나일론 재료(스트링B)로 이루어진 두 가지 종류의 스트링을 가지고, 스트링과 강체의 충돌 실험을 통하여 장력과 충돌 속도에 따

른 스트링의 반발 거동의 변화를 연구해 보았고, 충돌 동안 스트링의 운동에 관해서도 연구해 보았다. 장력이 걸려 있는 스트링의 길이 방향 중간 부분을 반경 방향으로 일정 속도로 누르면서 이때의 복원 특성과 비교해 보았다. 스트링은 가늘고 긴 형상으로 인해 반발이나 복원 거동 시 굽힘 강성(bending stiffness)을 무시할 수 있으며, 따라서 길이 방향 인장 특성에 주목하여 역학적 특성을 연구해 보았다.

2. 관련 이론

2.1 스트링과 강체의 충돌 이론

강체의 충돌 전후 속도를 각각 v_{Ai} , v_{Af} , 스트링의 충돌 전,후 속도를 v_{Bi} , v_{Bf} 라 하고, Fig. 1과 같이 충돌 작용선을 따라서 윗방향을 양으로 정하면, 윗방향의 힘과 속도는 양의 값이고 아래방향의 힘과 속도는 음의 값을 가지게 된다.

일반적으로 변형충격량(deformation impulse)이 복원충격량(restoration impulse) 보다 크며, 이 두 충격량의 비를 반발계수(coefficient of restitution, e , COR)라 정의한다. 스트링과 강체에 대한 식 (1),(2)에서

둘 사이의 공통속도 v_c 를 소거하면 식(3)을 얻는다.

$$\eta \dot{\epsilon}_{zz} + E \epsilon = \tau_{zz} \quad (5)$$

3. 실험 장치 및 실험 방법

3.1 스트링과 강체의 충돌 실험

강체의 충돌 속도에 따라서, 그리고 스트링 장력의 변화에 따라서 충돌 거동의 변화와, 충돌 동안 스트링의 거동을 알아보기 위하여 Fig. 2 와 같이 장치를 하였다. 충돌동안 낙하체(falling mass)에 붙여놓은 가속도계의 신호로부터 시간에 따른 가속도의 변화를 얻었고, 이로부터 반발 계수를 계산하였다.

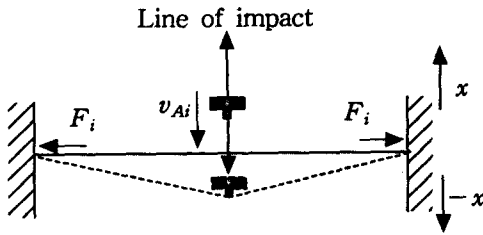


Fig. 1 String, rigid body impact model

$$e = \frac{\int_{t_c}^{t_i} F_r dt}{\int_{t_c}^{t_i} F_d dt} = \frac{v_c - v_{Af}}{v_{Ai} - v_c} \quad (1)$$

$$e = \frac{\int_{t_c}^{t_i} F_r dt}{\int_{t_c}^{t_i} F_d dt} = \frac{v_{Bf} - v_c}{v_c - v_{Bi}} \quad (2)$$

$$e = - \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Bi} - v_{Ai}} = - \frac{v_{Af}}{v_{Ai}} \quad (3)$$

2.2 스트링의 인장 점탄성 이론

스트링의 양단을 매우 천천히 길이 방향으로 인장 시켜보면 재료는 탄성 영역을 거쳐 소성 영역에 들어가는 시간 비 의존성 변형(time-independent deformation)이 나타난다. 이에 반하여 그 응답이 시간 의존성 변형(time-dependent deformation)을 보이며, 응답에 시간이라는 인자가 관여할 때를 점성(viscosity) 이라 한다. 점성의 경우 변형을 보다 변형을 속도가 응력에 영향을 많이 주며, 이 경우 변형과 동시에 에너지의 소산이 발생하게 된다.

$$\frac{d\epsilon_{zz}}{dt} = \dot{\epsilon}_{zz} = g(\tau_{zz}) = \frac{\tau_{zz}}{\eta} \quad (4)$$

식(4)에서 η 를 점성 계수(coefficient of viscosity)라 부르며, 에너지 소산의 정도를 표현하게 된다.

식(5)와 같이 탄성 응력 ($E \epsilon_{zz}$)과 점성 응력 ($\eta \dot{\epsilon}_{zz}$)의 합이 전체 시스템의 응력으로 표현된다.

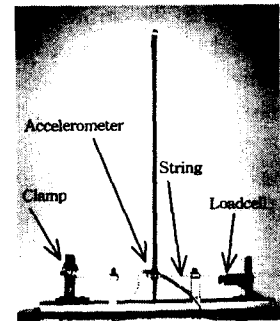
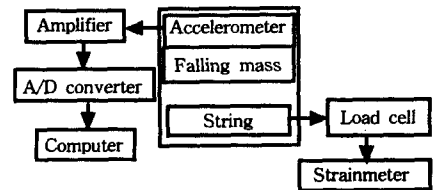


Fig. 2 Impact test set between string and rigid body

충돌 동안 스트링에 야기된 하중의 변화를 알아 보고자 로드셀로 연속적인 신호도 받아 보았다.

다음에 Fig. 3 과 같이 만능시험기를 이용하여 반경 방향으로 누르며 복원력 측정 실험을 해 보았다.

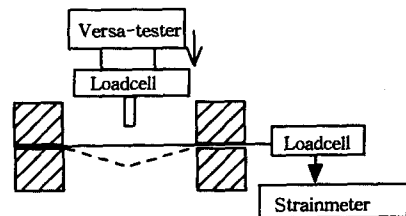


Fig. 3 Measuring device for restoring force

3.2 스트링의 정적, 동적 인장 시험

정적 인장 시험은 INSTRON 사의 1127형 인장 시험기와 스너빙(snubbing) 형태의 그립(grip)을 사용했다.

스트링A와 스트링B에 대하여, 식(5)의 속도에 따른 감쇠를 나타내는 점탄성 계수를 알아보기 위하여 몇 가지 인장 속도로 변화시켜 가며 축방향 동적 인장 시험을 했다. 결과 값에서 정적 인장 시험의 결과 값을 빼서, 단지 인장 속도에 의해서 감쇠된 응력값을 얻었으며, 이를 감쇠 응력(τ_{Damped})이라 했다.

$$\tau = \tau_{Elastic} + \tau_{Damped} \quad (6)$$

$\tau_{Elastic}$ 은 3.3 절의 인장시험에서 얻은 값으로, τ_{Damped} 는 식 (6)과 같은 형태로 계산하여 응력값을 나타내었다.

3.3 구속 조건을 변화한 스트링의 충돌 실험

스트링의 양단을 고정시키는 방법에 따라서 반발 계수의 변화를 연구했다.

편의상 3.1절에서 사용했었던 클램프를 무딘 클램프(blunt clamp)라 하고, 새로이 변경시킨 클램프를 날카로운 클램프(sharp clamp)라 했다. 무딘 클램프는 클램핑 부분이 15mm×50mm의 직사각형 형태로 스트링 고정시 선 접촉을 하게된다. 날카로운 클램프는 클램핑 부분이 1mm×50mm로 스트링을 고정시 무딘 클램프에 비해서 점 접촉에 가깝다고 볼 수 있다.

4. 실험 결과

정적 인장 시험으로부터 스트링 A의 탄성 계수 값으로 2.6 GPa, 스트링B는 0.25GPa 을 얻었다.

Fig. 4부터 Fig.7 까지 에서 볼 수 있듯이 스트링의 반발계수는 초기 장력에 비례하여 증가하고, 충돌 속도가 커짐에 따라 작아 지는 것을 알 수 있다. 강성이 큰 스트링A가 보다 선형성을 나타내는 것을 볼 수 있다.

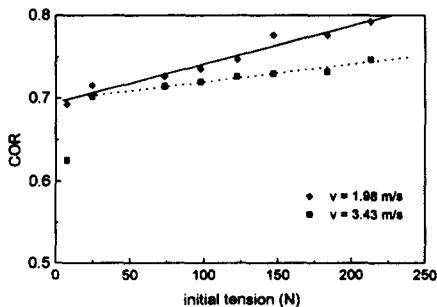


Fig. 4 Initial tension-COR relation of string A

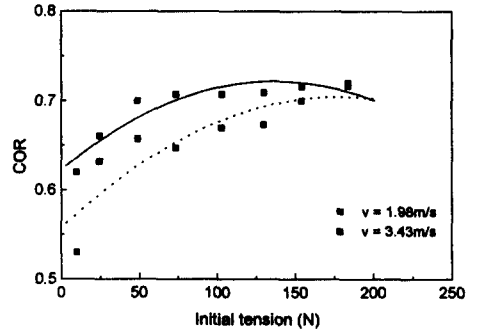


Fig. 5 Initial Tension-COR relation of the string B

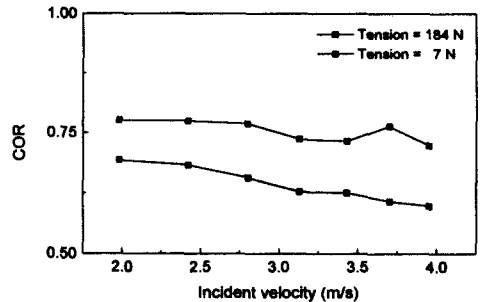


Fig. 6 Velocity-COR relation of the string A

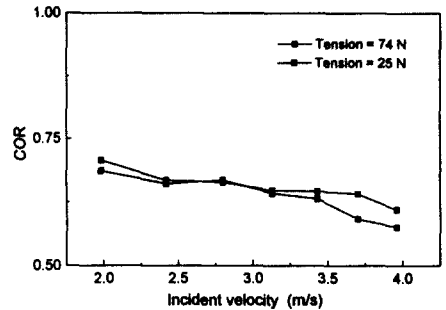


Fig. 7 Velocity-COR relation of the string B

스트링의 양단에서 클램핑(clamping)조건의 변화에 따른 반발계수의 변화를 Fig.8 ,Fig.9에 도시하였다.

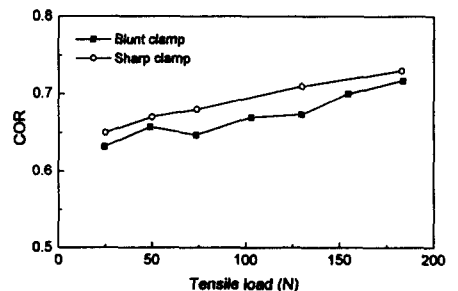


Fig. 8 Comparing with two clamps along an initial tension

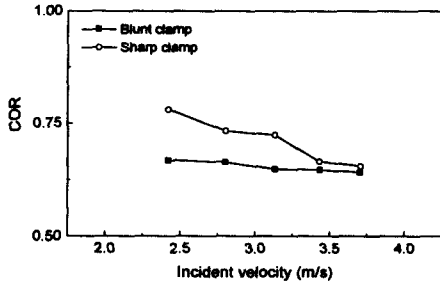


Fig. 9 Comparing with two clamps along an incident velocity

Fig.10은 복원력 측정 실험 결과와, 앞의 인장실험 결과들을 이용해서 점탄성 모델로 계산해 본 복원력의 그래프이다. 비교적 잘 일치 하는 것을 볼 수 있다.

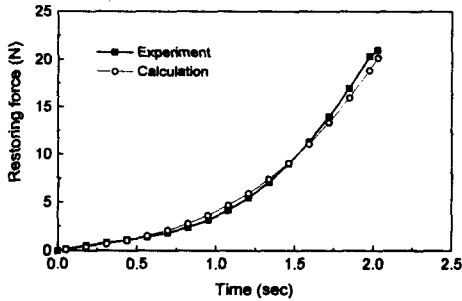


Fig. 10 String A ($v = 300\text{mm/min}$, tensile load = 10N)

Fig.11은 스트링과 강체의 충돌 실험 결과와, 점탄성 모델을 가정하고 인장시험의 결과들을 이용하여 계산한 결과이다. Fig.12는 탄성 모델을 가정하여 계산한 결과이다.

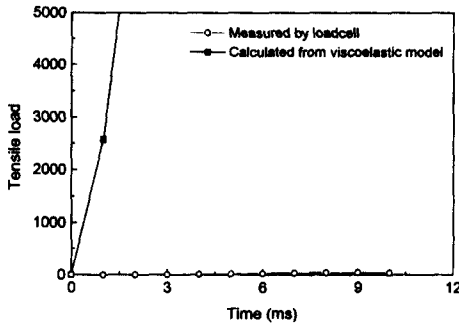


Fig. 11 Tensile load of the string (viscoelastic model)

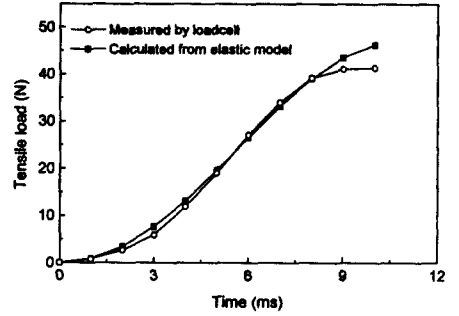


Fig. 12 Tensile load of the string (elastic model)

5. 결론

양단이 고정된 경계 조건에서 스트링의 반발 및 복원 거동의 특성을 실험을 통하여 연구해 보았다. 두 가지 종류의 스트링을 준비하여 실험을 수행했으며, 스트링의 장력과 충돌체의 속도에 따른 반발 특성을 보았다.

반발 계수는 스트링의 장력이 커질수록 증가하고, 충돌 속도가 빠를수록 감소했다. 스트링의 세장비로 인해 굽힘 강성을 무시하고, 반발 특성을 길이방향 인장 시 나타나는 점탄성 특성과 관련지어 생각해 보았으나, 반발 거동 시 스트링의 점탄성 특성은 아주 작게 나타므로 무시할 수 있었고, 따라서 충돌 시 스트링은 탄성거동을 한다.

그러나 충돌 때와는 달리 초기 장력이 있는 스트링을 반경 방향으로 누르면서 일정 속도로 변형 시켰을 때에는 점탄성 거동을 했다. 길이방향 인장 시험의 결과로 얻은 점탄성 모델을 적용시켰을 경우에도 잘 부합했다. 스트링은 느린 속도범위에서는 인장 속도에 따라 하중이 급격히 증가하였으나, 충돌과 같이 매우 빠른 속도로 인장이 매우 짧은 시간 동안에 일어나는 경우에는 탄성 거동을 한다. 스트링의 반발 특성은 재료 내부의 거동 특성 보다는 충돌 시면과 면의 마찰로 인한 에너지 손실에 영향을 받는다.

참고문헌

1. K.K.Deb., "Dynamics of a String and an Elastic Hammer," *Journal of Sound and Vibration*, vol 40, pp. 243-248, 1974.
2. Kanda., "Finite Element Analysis of Impact of aball on a Tennis Racket," *일본기계학회논문집(C편)*, Vol. 62, pp. 2164-2171, 1995.
3. T. P. Valkering, "Non-Trivial Dynamics in a Driven String with Impact Non-linearity," *Journal of Sound and Vibration*, Vol 1755, No 3, pp. 397-422, 1994.
4. Kawazoe, "Analysis of Impact Phenomena in a Tennis Ball-Racke System," *JSME International Journal*, Vol 40, No 1, pp 9-16, 1997.