

유사동적실험을 위한 내재적 방법에 관한 연구

Research on the Implicit Method for Pseudo-Dynamic Test

박종협*
Park, Jong Heob

조창백**
Cho, Chang Beck

정영수***
Chung, Young Soo

ABSTRACT

The use of unconditionally stable implicit time integration techniques for pseudo-dynamic test has been recently proposed and advanced by several researchers such as Thewalt and Mahin, Nakashima and Shing, etc. The developed implicit algorithms are based on the α -Method of Huges et al. In this paper, a concise summary and explanation of implicit method for Pseudo dynamic test is presented. Especially, The α -C method developed by shing et al. has been in-depth evaluated for this study. Important parameters of the α -C method have been analyzed by the simulation test.

1. 서론

유사동적 실험은 진동대실험의 사실성과 준정적실험의 실험적 기법을 결합한 실험방법이라 말할 수 있으며 그림 1에서 보여주는 바와 같이 공시체에 부과되는 변위 이력은 수치적 계산에 의해 결정되어 지고 이들 값이 실험체에 대해 준정적으로 부과되며, 이 부과된 변위에 대해 복원력을 측정하여 step-by-step으로 동적 지배 미분방정식을 수치적으로 풀어서 실험을 진행해 나가는 방법이다.

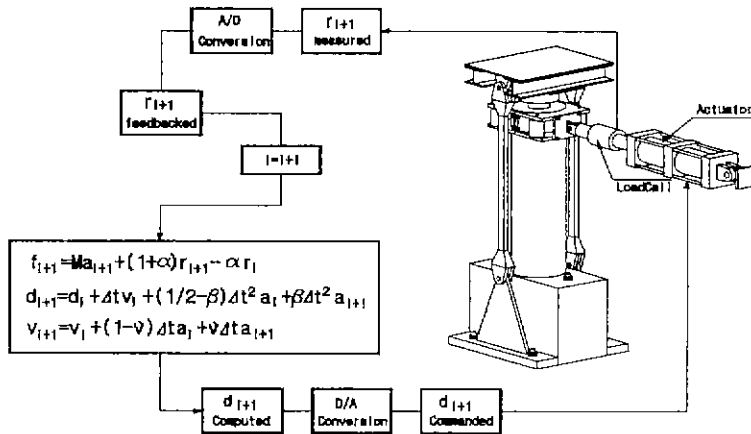


그림 1 유사동적실험의 개요

*강희원, 중앙대학교 대학원 토목공학과 박사과정
**강희원, 중앙대학교 대학원 지구환경시스템공학과 석사과정
***강희원, 중앙대학교 건설대학 토목공학과 교수

유사 동적 실험에서의 수치적분 방법은 외연적(explicit)방법과 내재적(implicit)방법이 널리 사용되고 있으며 최근에는 수치적 계산에 드는 노력에도 불구하고 해의 안정성과 바람직한 에너지 소산특성⁴⁾ 때문에 내재적 방법에 의한 유사 동적 실험기법에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 따라서 본 연구에서는 내재적 방법 중에서 α -C 방법에 관한 기본 알고리즘 고찰 및 RC교각을 모델로 해서 간단한 simulation test를 통해 중요 입력 변수에 관한 고찰을 하고자 한다.

2. 내재적 방법의 알고리즘

2.1 개요

stiff 다자유도 구조물과 구조분할기법 실험을 위해 다양한 내재적 방법의 알고리즘은 최근에 개발되었다. 이들 알고리즘의 대부분은 Hilber et al.에 의해 제안된 α -Method에 기초하고 있으며 내재적 방법의 발달사를 간략히 정리하면 다음과 같다.

1) Thewalt and Mahin이 비선형 다자유도 구조물의 실험을 위해서 hybrid-digital-analog 접근방법에 기초한 수치적 반복과정이 없는 내재적 방법의 알고리즘을 최초로 개발하였으며 외연적 Newmark β 방법과 비교해 보면 외연적 Newmark β 방법의 변위 d_{i+1} 이 오로지 이전 단계의 값으로만 결정되는 반면에 이 알고리즘에서는 변위 d_{i+1} 은 다음의 식과 같이 결정된다.

$$d_{i+1} = d_i + \Delta t v_i + (1/2 - \beta) \Delta t^2 a_i + \beta \Delta t^2 B a_x + \beta \alpha \Delta t^2 M^{-1} r_i - \beta (1 + \alpha) \Delta t^2 M^{-1} r_{i+1} \quad (4)$$

위의 식에서 r_{i+1} 을 제외한 모든 항은 이전 단계에서 결정이 되며 r_{i+1} 값은 변위제어 loop에서 아날로그 전자장치를 이용해서 측정된 feedback voltages를 사용하여 결정된다.

2) 고주파수 성분을 가진 구조물의 구조분할기법 실험을 위해서 Nakashima et al.이 "Operator-Splitting Method"라 불리는 무조건적 안정 알고리즘을 성공적으로 개발하였다. 이 방법은 predictor-corrector 접근방법에 근거하고 있고, 정확한 해를 얻기 위해서 수치적 반복과정이나, 아날로그 전자장치도 필요로 하지 않는다.

3) 위의 내재적 알고리즘 발달에 영감을 받아서 Shing et al.이 α -C Method를 개발하였으며, 이 알고리즘은 Thewalt and Mahin의 방법과 유사하지만 이 방법은 가장 전통적인 내재적 알고리즘을 사용할 수 있다는 것이고 복원력 r_{i+1} 이 아날로그 전자장치 대신에 구조물의 초기강성을 이용한 수치적 반복계산에 근거하여 결정된다는 것이다. 이 알고리즘의 장점은 이중변위제어시스템을 활용하는 것이다.

2.2 α -C 방법

본 연구에서 채택한 유사동적실험을 위한 수치적분법은 Hilber, Hughes, and Taylor에 의해서 제안된 α 방법에 기초해서 Shing에 의해 개발된 ' α -C Method'이며, Newmark β 방법과 본질적으로 동일하지만 운동방정식은 다음과 같이 수정된다.

$$M a_{i+1} + (1 + \alpha) C v_{i+1} - \alpha C v_i + (1 + \alpha) \gamma r_{i+1} - \alpha \gamma r_i = (1 + \alpha) f_{i+1} - \alpha f_i \quad (1)$$

$$d_{i+1} = d_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 [(1/2 - \beta) + \beta a_{i+1}] \quad (2)$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t [(1 - \gamma) a_i + \gamma a_{i+1}] \quad (3)$$

여기서, M 과 C 는 질량 및 감쇠값을, d_i , v_i , a_i : Δt 에서의 변위, 속도, 가속도값, Δt : 적분시간 간격, γ_i : 복원력값, f_i : 지진하중값, i 는 time-step을 나타낸다. 여기서 α , β , γ 는 이 알고리즘의 수치적 특성을 지배하는 parameters 들이며 위의 알고리즘이 무조건적 안정을 이루기 위해서는 α , β , γ 는 다음의 값을 가져야 한다¹⁴⁾.

$$-0.5 \leq \alpha \leq 0, \quad \beta = (1 + \alpha)^2 / 4, \quad \gamma = (1/2 - \alpha)$$

위의 (1)~(3)식에서 (2)식의 a_{i+1} 및 (3)식의 v_{i+1} 을 (1)식에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\overline{M} d_{i+1} = \overline{M} \hat{d}_{i+1} - \Delta t^2 \beta (1 + \alpha) r_{i+1} \quad (4)$$

여기서 $\overline{M} = M + (1 + \alpha) \gamma \Delta t C$ (5)

$$\overline{M} \hat{d}_{i+1} = \overline{M} [d_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 (1/2 - \beta) a_i] + \Delta t^2 \beta [(1 + \alpha) f_{i+1} - \alpha f_i - C v_i - (1 + \alpha)(1 - \gamma) \Delta t C a_i + \alpha r_i] \quad (6)$$

(4)식의 d_{i+1} 은 내재적 해를 나타내며, 이전 단계의 값으로 결정되는 $\overline{M} \hat{d}_{i+1}$ 과 현재의 복원력 r_{i+1} 의 함으로 구성된다. r_{i+1} 이 d_{i+1} 에 의존하기 때문에, 만약 구조물의 정확한 강성을 명확하게 알 수 없다면 변위응답은 수치적 반복과정에 의해 평가되어야 할 것이다. 따라서 위의 식은 다음과 같이 되며

$$\overline{M} d_{i+1}^{(k)} = \overline{M} \hat{d}_{i+1} - \Delta t^2 \beta (1 + \alpha) r_{i+1}^{(k)} + \overline{M} e_{i+1}^{R(k)} \quad (7)$$

여기서 k는 iteration index를, $e_{i+1}^{R(k)}$ 는 수렴(convergence) error를 나타낸다. (4)식으로부터 (7)식을 뺀 식에 $\Delta r_{i+1}^{(k)} = K \Delta d_{i+1}^{(k)}$ 를 대입하면 다음의 식을 얻으며 여기서 K는 변위증가를 위한 secant stiffness를 나타낸다.

$$K^* \Delta d_{i+1}^{(k)} = - \overline{M} e_{i+1}^{R(k)} \quad (8)$$

여기서, $K^* = \overline{M} + \Delta t^2 \beta (1 + \alpha) K$ (9)

$\| \overline{M} e_{i+1}^{R(k)} \| \leq \epsilon$ 의 조건을 만족해야 하며 ϵ 은 preset tolerance limit이다. 유사동적실험에서는 secant or tangent stiffness가 명확하게 알려져 있지 않기 때문에, K는 초기강성값을 사용한다. α -C 알고리즘의 수렴조건은 $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{M} e_{i+1}^{R(k)} = 0$ 이며 이 조건을 가지고 유도되는 α -C 알고리즘의 수렴을 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$\tilde{K}_{i+1}^{*(k)} = \overline{M} + \Delta t^2 \beta (1 + \alpha) K_{i+1} > 0 \quad (10)$$

발산(divergence) 검토를 위해 위의 식에 $\tilde{K}_{i+1}^{*(k)}$ 의 좌·우에 $(\Delta d_{i+1}^{(k)})^T$ 와 $\Delta d_{i+1}^{(k)}$ 를 곱하고 $\Delta t^2 \beta (1 + \alpha) (\Delta d_{i+1}^{(k)})^T M \Delta d_{i+1}^{(k)}$ 로 일반화시키고 난 다음 $K_{i+1}^{(k)} \Delta d_{i+1}^{(k)} = \Delta r_{i+1}^{(k)}$ 로 치환하면 다음의 식을 얻는다.

$$Q_{i+1}^{(k)} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta (1 + \alpha)} + \frac{(\Delta d_{i+1}^{(k)})^T \Delta r_{i+1}^{(k)}}{\theta (\Delta d_{i+1}^{(k)})^T M \Delta d_{i+1}^{(k)}} > 0 \quad (11)$$

$Q_{i+1}^{(k)} > 0$ 은 (10)식의 $\tilde{K}_{i+1}^{*(k)}$ 의 값이 양의 값을 가져야 하기 때문이다. $\Delta r_{i+1}^{(k)}$ 는 두 개의 연속적인 반복 간격사이에 있는 복원력의 증가이며, $\Delta d_{i+1}^{(k)}$ 는 변위증가분이다. 발산검토를 위해서 $Q_{i+1}^{(k)} > Q_L$ 이어야 하며 Q_L 은 0보다 큰 값이 요구되는 사용자 지정값이다.(가령, 0.01과 같은 값) 위의 (11)식은 Δt 를 위한 또 하나의 다음과 같이 유도되는 조건식을 만들어준다.

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\beta (1 + \alpha) (Q_L - (w_{i+1}^{(k)}))^2}} \quad (12)$$

$Q_{i+1}^{(k)} > Q_L$ 을 만족하지 않으면 유사동적프로그램은 자동으로 멈추며 time step은 (12)식에서 허용된 최대값으로 바뀐다. 발산 검토가 끝나면 d_{i+1} 과 r_{i+1} 값이 마지막 반복과정에서 얻어진 값으로 바뀌며 즉, $d_{i+1} = d_{i+1}^{k+1}$, $r_{i+1} = r_{i+1}^{k+1}$ 로 치환되며 이 값을 가지고 a_{i+1} 및 v_{i+1} 값을 다음의 식에 의해

계산한다.

$$a_{i+1} = \frac{[(1+\alpha)f_{i+1} - \alpha f_i - CV_i - (1+\alpha)(1-\nu)\Delta t Ca_i - (1+\alpha)\gamma_{i+1} + \alpha\gamma_i]}{[M + (1+\alpha)\gamma\Delta t C]} \quad (13)$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t[(1-\gamma)a_i + \gamma a_{i+1}] \quad (14)$$

(11)식에서 감소계수 θ 는 각 반복단계에서 변위증가에 적용하는 0과 1사이의 값을 가지는 과도변위의 가능성을 줄이기 위한 사용자 입력 계수이다. 이러한 time-stepping 계산과정을 가지는 유사동적실험에서 얻어지는 응답의 정확성은 선택된 허용오차에 의해 지배된다. (8)식에 의해서 계산되는

$\Delta d_{i+1}^{(k)}$ 의 값이 변위허용오차 Δd^n 보다 충분히 작다면 수치적 결과의 해를 신뢰할 수 있다고 말할 수 있다. 따라서 위의 내용을 가지고 유사동적실험을 위한 flow chart를 그리면 그림 2와 같이 되며 α -C 알고리즘의 실험개요는 그림 3과 같이 된다. 그림 3에서 외부변위 transducers는 수치해의 수렴 검토용으로 사용되며 내부변위 transducers는 servo-control loop의 actuators를 제어하기 위해 사용된다.

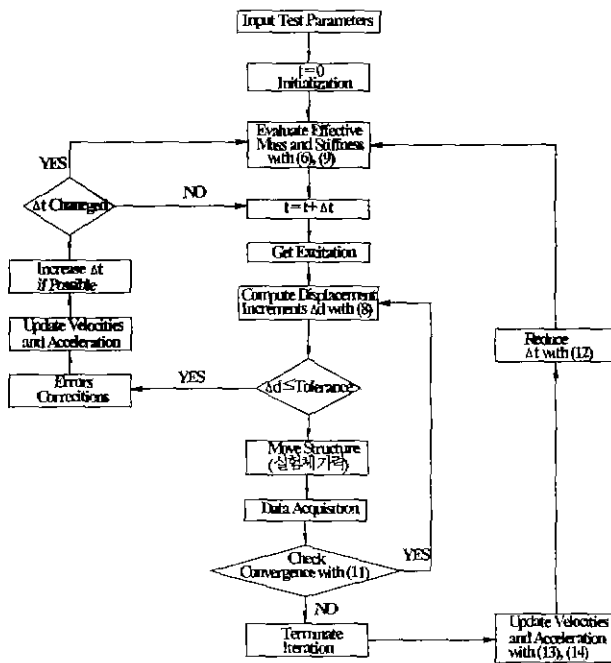


그림 2 α -C 알고리즘의 Flow Chart

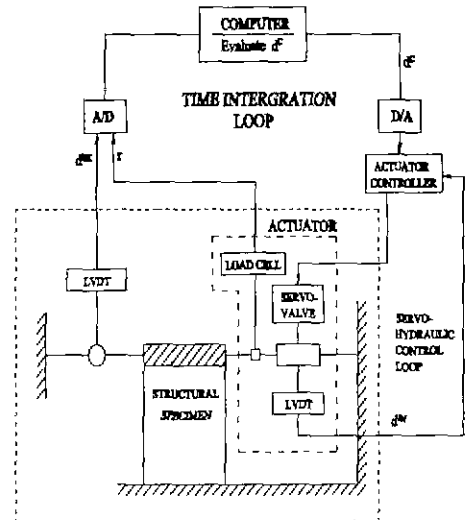


그림 3 α -C방법의 실험 개요

3. 수치적 Simulation

: 수치적 Simulation을 위해서 경기도 수원시에 위치한 내진1등급으로 설치된 하갈교를 scale factor 3.4로 하여 모델링하였다. 모델은 SDOF system으로 모델링 하였으며, 적용된 상사법칙은 표 1과 같다. 실험체의 감쇠비(Damping Ratio)를 얻기 위해 자유진동실험을 수행하였으며 사진 1은 자유진동실험 광경을 보여주고 있다. 자유진동실험을 통해 측정된 감쇠비는 4.78%이다. 초기강성값은 Monotonic Test를 통하여 얻었다 따라서 유사동적 simulation을 위한 input parameters를 정리하면 다음과 같다.

표 1 scale factor

Quantity	scale factor	하갈교	시험체
Length	s	6.4 m	1.882 m
Diameter	s	1.7 m	0.5 m
Mass	s^3	1,661.32 tonf	42.27 tonf
Time	s	0.01	0.002941
Acceleration	1/s	150.92 (gal)	513.128 (gal)

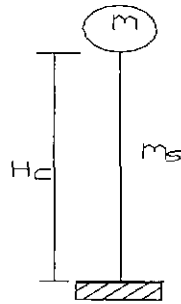


그림 4 SDOF Modelling

사진 1 자유진동실험광경

$$K=20.60 \text{ KN/mm}, M=0.0431327 \text{ KN} \cdot \text{sec}^2/\text{mm}, C=0.0895 \text{ KN} \cdot \text{sec}/\text{mm}$$

$$Q_1=0.01, \Delta d^n=1.2\text{mm} \quad (\Delta d_{\max}=20\text{mm})$$

여기서 Δd_{\max} 값은 비내진설계된 RC교각의 SARCF비선형 해석 프로그램⁽⁵⁾을 이용하여 얻은 최대 변위값이다. 해석을 위해 사용된 input ground motion은 일본건설성의 토목연구소가 개발한 Type II의 rock condition에 해당하는 Kaihokus.xy 지진파(0.360g)를 scale down 한 0.154g를 이용하였다.

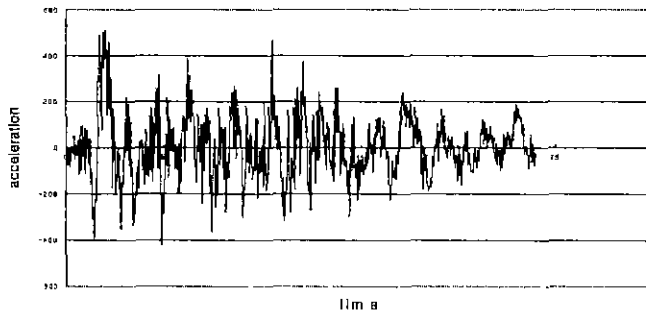


그림 5 Kaihokus.xy(0.154g)

여러 가지 Input parameters를 변수로 하여 simulation을 수행하였다.

i) α 를 variable로 하였을 때

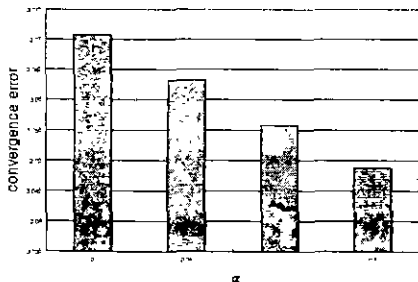


그림 6 α 값에 따른 수렴 error

ii) Δt 를 variable로 하였을 때

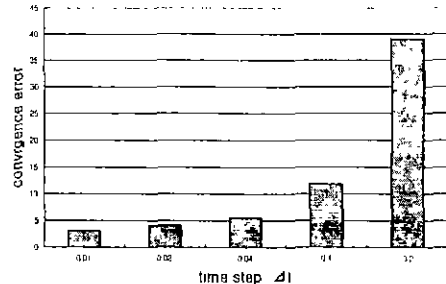


그림 7 Δt 값에 따른 수렴 error

α 를 0, -0.05, -0.1, -0.5로 하여 simulation을 해 본 결과 α 값이 줄어들수록 수렴 error도 줄어드는 방향

을 보였으며 Δt 를 0.01,0.02,0.04,0.1,0.2로 하여 simulation 해 본 결과 Δt 가 증가함에 따라 수렴 error가 급격히 증가하는 것을 보였다.

iii) Q_f 을 variable로 하였을 때

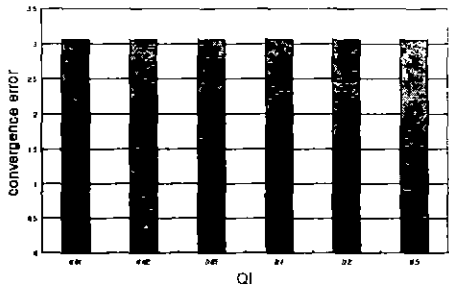


그림 8 Q_f 에 따른 수렴 error

iv) Δd_n 을 variable로 하였을 때

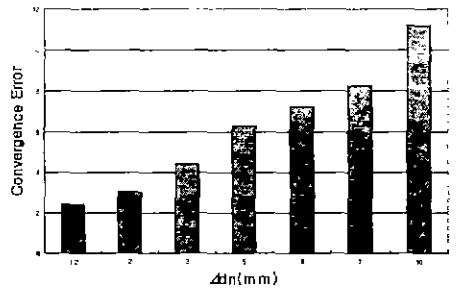


그림 9 Q_f 에 따른 time history

Q_f 값을 0.01, 0.02,0.05,0.1,0.2,0.5로하여 simulation 해 본 결과 Q_f 값의 증가에 따른 수렴 error는 변하지 않았으며 Δd_n 을 2,3,5,6,7,10mm로 하여 simulation 해 본 결과 수렴 error가 Δd_n 값이 증가할수록 급격히 증가하는 것을 보여주고 있다.

4. 결론

- 위의 α -C 방법을 이용한 simulation tes결과를 정리하면 다음과 같다.
- 1) 탄성범위에서의 α 값의 변화에 따른 수렴 error의 영향은 거의 볼 수가 없었다.
- 2) Δt 값의 증가에 따라 수렴 error는 급격히 증가하는 것을 보여 주고 있으며 Δt 값을 줄이면 수렴 error는 줄어들겠지만 과도한 계산 시간의 문제가 발생하므로 Δt 를 선택할 때에는 충분한 고려를 하고 나서 결정해야 한다.
- 3) Q_f 값에 따른 수렴 error의 영향은 거의 볼 수가 없었다.
- 4) Δd_n 에 따른 수렴 error는 급격히 변화하는 경향을 보였으며 Pui-Shum B. Shing은 일반적으로 탄성영역에서는 예상되는 최대변위의 6%, 비탄성영역에서는 2%정도를 추천하고 있다.

5. 감사의 글

본 연구는 건설교통부(과제번호:970003-4),한국지진공학센터(과제번호:1997G0402)의 지원 및 1998년도 중앙대학교 연구기자재 지원프로그램의 지원을 받아 수행되고 있으며 이에 감사드립니다.

6. 참고문헌

1. 한국도로교시방서(1996), 건설교통부
2. M. J. N. Priestley, F. Seible, G. M. Calvi, "Seismic Design and Retrofit of Bridges", John Wiley & Sons, Inc.
3. Pui-Shum B Shing, Mani T. Vannan and Edward Cater, " Implicit Time Integration for Pseudo-Dynamic Tests " ,Earthquake Engineering and structural Dynamic. VOL.20, 551-576 (1996)
4. Oreste S Bursi, Pui-shum B. Shing and Zorica Radakovic-Guzina, " Pseudo-Dynamic Testing of Strain-Softning Systems with Adaptive Time Steps " Earthquake Engineering and Structural Dynamics, VOL.23, 745-760 (1994)
5. Y.S. Chung, M. Shinozuka, C. Meyer, "Sarcf User's Guide Seismic Analysis of Reinforced Concrete Frame", Technical Report NCEER-88-0044, November 9, 1988