천수효과를 고려한 확장형 Boussinesq 방정식의 개선

이 창 훈

1. 머리말

Boussinesq 방정식의 적용성을 천해에서부터 심해로의 확장하려는 노력은 1990년대에 활발히 진행되었다. Madsen 등(1991)과 Madsen과 Sorensen(1992)은 수면변위와 체적속을 변수로 하는 Abbott 등(1978)의 Boussinesq 방정식의 분산항에 조율계수 B를 잘 조정하여 선형의 분산관계를 향상시켰다. 한편 Nwogu(1993)는 수면변위와 임의의 위치 $z=z_a$에서의 수평방향의 유속을 변수로 하는 Boussinesq 방정식을 유도하였다. 그리고 그 식에서 유도되는 선형의 분산관계를 향상시킬 수 있는 위치를 제시하였다. Chen과 Liu(1995)는 Nwogu의 방법을 사용하여 Boussinesq 방정식을 개발하였는데 그들은 종속변수로 수평방향의 유속 대신에 속도포텐셜을 사용하였다. 그런데, 현재까지 시도된 Boussinesq 방정식의 확장 노력에는 조율계수 값이 전 수심에 동일하게 적용되었다. 천해에서는 파랑의 분산성이 적기 때문에 어떤 조율계수 값을 사용하여도 파랑변형을 예측하는데 오차가 작지만 중간수심해에서는 고정된 조율계수 값을 사용함으로 인하여 파랑의 분산성을 정확히 예측할 수 없게 되고 수심이 깊어지면 깊어질수록 그 오차가 커지는 문제점이 있다. 파랑의 변형은 파랑의 위상 및 에너지가 변하면서 천수, 굴절, 회절, 반사가 발생하는 것이다. 파랑식을 사용하여 파랑의 변형을 예측하려고 할 때 굴절, 회절, 반사의 정확한 예측은 파랑의 위상을 정확히 예측해야만 가능하다. 선형의 분산관계로부터 모형식이 파랑의 굴절, 회절, 반사를 정확히 예측할 수 있는가를 평가할 수 있지만 파랑의 천수를 정확히 예측할 수 있는지는 알 수 없다. 천수의 정확한 예측은 수심변화에 따른 파랑에너지의 변화율을 정확히 예측해야만 가능하다.

본 연구에서 Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식에서 수심변화에 따른 파랑에너지의 변화율이 선형의 Stokes파 이론치에 근접하도록 조율계수 값을 선택하는 경우를 검토하였다. 선택되는 조율계수 값은 상대수심에 따라 다르게 될 것이다. 또한 비교의 수단으로 전 수심에 $\alpha=-0.4$의 경우도 함께 검토하였다. 그리고 이론에서 제시되는 모형식의 정확성을 검증하기 위해서 Nwogu 식을 사용하여 수치실험 하였다. 실험 예로는 경사면 위로 파랑이 전파하는 경우에 파랑의 천수현상에 따라 공간적으로 변하는 파고를 관측하였다.

2. 선형의 모형식에서 천수식 유도 및 군속도의 재평가

Boussinesq 방정식에서 비선형항을 무시하고 수평방향으로 1차원의 경우 기하 광학적 접근법을 사용하여 파랑의 위상 및 진폭의 거동을 이론적으로 예측할 수 있다(Madsen과 Sorenden, 1992). Nwogu 식에서 비선형항을 무시하고 수평방향으로 1차원의 경우에 유속 u로 표현되는 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

세종대학교 토목환경공학과 조교수

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\frac{\partial^2}{\partial x^2}(hu) - g\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(\frac{z_a^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(z_a + \frac{h}{2}\right)h\frac{\partial^2}{\partial x^2}(hu)\right] + \frac{z_a^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + z_a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{1}$$

유속 u를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$u = A_u e^{i\Psi} \tag{2}$$

위 식에서 A_u는 유속의 진폭이고, Ψ는 위상함수이다. 식 (2)를 식 (1)에 대입한 뒤 $O(1)$의 항을 정리하면 다음과 같은 선형의 분산관계를 얻을 수 있다.

$$C^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = gh\frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)k^2h^2}{1 - \alpha k^2h^2} \tag{3}$$

위 식에서 $\alpha = (z_a/h)^2/2 + z_a/h$이다. 그리고, $O(\partial A_u/\partial x, \partial k/\partial x, \partial h/\partial x)$의 항을 정리하면 다음과 같은 천수식을 구할 수 있다.

$$\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x} = -\alpha_5\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{4}$$

위 식에서 계수는 다음과 같다.

$$\alpha_5 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4}{\alpha_1} \tag{5}$$

$$\alpha_1 = 2 + 2\frac{k^2h^2}{1 - \alpha k^2h^2}\left[-\alpha - \frac{2}{3} + \alpha\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)k^2h^2\right] \tag{6}$$

$$\alpha_2 = 3 + \frac{k^2h^2}{1 - \alpha k^2h^2}\left\{-3\alpha - \frac{10}{3} + \frac{\alpha k^2h^2}{1 - \alpha k^2h^2}\left[3\alpha - \frac{1}{3} - 3\alpha\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)k^2h^2\right]\right\} \tag{7}$$

$$\alpha_3 = 2 + 2\frac{k^2h^2}{1 - \alpha k^2h^2}\left\langle -\alpha - \frac{3}{2} + \frac{k^2h^2}{1 - \alpha k^2h^2}\left\{-2\alpha\left(\alpha + \frac{2}{3}\right) + \alpha\left(\frac{3}{2}\left(\frac{z_a}{h}\right)^2 + 4\frac{z_a}{h} + \frac{3}{2}\right) - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{z_a}{h} + \alpha k^2h^2\left[2\alpha\left(\alpha + \frac{1}{3}\right) - \alpha\left(\frac{3}{2}\left(\frac{z_a}{h}\right)^2 + 4\frac{z_a}{h} + \frac{3}{2}\right) + \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{z_a}{h}\right]\right\}\right\rangle \tag{8}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}\frac{1 - (2\alpha + 1)k^2h^2 + \alpha\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)k^4h^4}{1 - 2\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)k^2h^2 + \alpha\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)k^4h^4} \tag{9}$$

선형의 Stokes파의 천수식 (4)의 계수 α_5는 다음과 같다(Madsen과 Sorensen, 1992).

$$\alpha_5 = \frac{\frac{2k_lh}{\sinh 2k_lh}\left[1 + \frac{k_lh}{\sinh 2k_lh}(1 - \cosh 2k_lh)\right]}{\left(1 + \frac{2k_lh}{\sinh 2k_lh}\right)^2} \tag{10}$$

위 식에서 아래첨자는 선형의 Stokes파의 이론치라는 것을 의미한다.

군속도 C_g는 수심이 일정한 경우 파랑에너지의 전파속도가 되고 공간적으로 수심의 변화가 있는 경우에 파랑에너지의 공간적인 변화율을 다음과 같은 관계에 의하여 결정한다.

$$\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}=-\frac{1}{2C_g}\frac{\partial C_g}{\partial x} \tag{11}$$

군속도 C_g는 선형의 Stokes파 이론에서 $C_g=\partial\omega/\partial k$의 정의로부터 다음과 같다.

$$C_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{C_l}{2}\left(1+\frac{2k_l h}{\sinh 2k_l h}\right) \tag{12}$$

이러한 정의에 의해서 Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식에도 군속도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=C\left\{1-\frac{k^2h^2}{3(1-\alpha k^2h^2)\left[1-\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)k^2h^2\right]}\right\} \tag{13}$$

그런데, 확장형 Boussinesq 방정식의 경우 파랑에너지의 공간적인 변화율은 식 (11)에서 결정되지 않고 천수식 (4)에서 결정된다. 따라서, Boussinesq 방정식에서 식 (13)에서 구한 C_g는 파랑에너지를 예측하는 데 그렇게 중요하지 않다고 판단된다. 그럼에도 불구하고 Chen과 Liu(1995)는 Boussinesq 방정식에서 재현되는 군속도를 엄밀해와 비교하기도 하고 위상속도와 군속도의 조합된 해를 엄밀해와 비교하는 작업을 하였다. 이는 해안공학자의 입장에서 볼 때 무의미하다고 판단된다.

3. 조율계수의 선택에 따른 모형식의 천수 거동 이론적 비교

확장형 Boussinesq 방정식이 천수 거동을 얼마나 잘 재현할 수 있는지 알아보기 위해서 조율계수 α값을 여러 가지 조건으로 선택하였다. α_5의 상대오차의 제곱 값이 최소가 되는 경우와 C_g의 상대오차의 제곱 값이 최소가 되는 경우와 조율계수 값을 전 수심에 동일하게 α=-0.4로 하는 경우를 비교하였다. α=-0.4는 선형의 Boussinesq 방정식에서 재현되는 선형의 분산관계가 선형의 Stokes파 이론에서 재현되는 분산관계를 Pade[2,2]로 근사화 하는 경우에 해당된다. 이때의 α와 α_5의 상대수심에 따른 변화를 그림 1, 2에 각각 도시하였다. α_5 값을 선형의 Stokes파 이론치에 맞추는 경우에 선택된 α값은 $kh<0.1\pi$의 천해에서 -0.414이었고 수심이 깊을수록 증가하다가 $kh=0.73\pi$의 중간수심해에서 -0.406으로 최대가 되고 수심이 더 깊으면 감소하면서 -0.419에 점근적으로 수렴한다. α값에 대응되는 α_5 값은 전 수심에 대해서 엄밀해와 일치한다. C_g를 엄밀해에 맞추는 경우에 선택된 α값은 $kh<0.1\pi$의 천해에서 -0.400이고 수심이 깊을수록 증가하다가 $kh>100\pi$의 심해에서는 -0.334에 점근적으로 수렴한다. α=-0.4의 경우 대체로 정확한 천수효과를 재현할 수 있는 것으로 나타났다.

4. 수평 1차원에서 경사면 위로 전파하는 파랑의 수치실험

계산영역의 좌·우경계에 스폰지층을 두어 이 경계로부터 파랑에너지의 반사를 억제하였다. Nwogu의 선형식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\frac{\partial}{\partial x^2}(hu)\right\}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{z_a^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+z_a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(h\frac{\partial u}{\partial t}\right)+wu=0 \tag{15}$$

위 식에서 $e=(z_\alpha^2/2-h^2/6)h$, $f=(z_\alpha+h/2)h$, w는 스폰지층 밖에서는 0이고 스폰지층의 시작점부터 끝점까지는 0부터 $2\pi/T$(T는 파의 주기임)까지 기하급수적으로 증가한다.

식 (14), (15)에서 u와 η를 각각 u_i와 $\eta_{i-1/2}$에 공간적으로 교호격자 상에 두었다. 아래첨자 i는 i번째 공간격자점을 의미한다. 식 (14), (15)에서 1차 공간미분식 모두를 $O(\Delta x^4)$의 절삭오차로 차분하였다. Δx는 공간상의 격자간격을 의미한다. 식 (14)에 있는 2차 및 3차 공간미분식을 $O(\Delta x^2)$의 절삭오차로 차분하고 식 (15)에 있는 2차 공간미분식을 $O(\Delta x^4)$의 절삭오차로 차분하였다. 또한 시간미분식은 $O(\Delta t^2)$의 절삭오차로 차분하였다. 시간미분식의 차분과정은 일본의 運輸省港灣技術研究所와 新日本氣象海洋株式會社(1996)에서 Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식을 차분하는 과정과 유사하다. 계산영역 내의 조파선에서 임의의 에너지를 갖는 파랑을 내부조파하였다. 계산영역의 좌·우경계에는 완전반사조건을 사용하였다. 격자간격은 $\Delta x=L/20$ (L은 파장임)로 두어 공간적으로 충분한 해상도를 얻었고, Courant 수는 $C_r=C_g\Delta t/\Delta x=0.2$로 두어 수치적으로 안정한 해를 얻었다.

경사가 일정한 바닥 위로 파랑이 전파하는 경우에 Boussinesq 방정식에서 재현되는 파고를 측정하였다. 파의 주기는 T=1.0초, 바닥의 경사는 1:30(수직거리:수평거리), 입사파의 파고는 H_0=2cm로 하였다. 경사면의 심해쪽 끝단(상대수심 $kh=\pi$)부터 30 파장 길이의 수평면을 두고 경사면의 천해쪽 끝단(상대수심 $kh=0.2\pi$)부터 3 파장 길이의 수평면을 두고 심해쪽 끝단에서 1 파장 떨어진 지점에 조파점을 두었다. 또한, 계산영역의 좌·우 경계에 2.5 파장 두께의 스폰지층을 두었다. 세 가지 유형의 α값을 사용한 경우에 비교하였다. 첫 번째는 α_5값의 상대오차의 제곱값이 최소가 되는 경우이고 두 번째는 군속도의 상대오차의 제곱값이 최소가 되는 경우이고 세 번째는 α=-0.4인 경우이다.

그림 3에 조파 시작 후 30 주기가 경과한 시각에 재현된 수면변위를 도시하였다. 수평좌표는 경사면의 심해쪽 끝단에서부터의 거리를 심해에서의 파장 L_0로 무차원화 시켰다. 수심이 변함에 따라 파고가 변하는 현상이 제대로 재현되는지 확인하기 위해 선형의 Stokes파 이론에 근거한 천수계수를 함께 도시하였다. α_5값을 맞추려고 한 경우에는 전 수심에서 수면변위의 진폭이 선형의 Stokes파 이론치와 거의 일치하는 것을 볼 수 있다. 반면에 군속도를 맞추려고 한 경우와 α=-0.4인 경우에는 수심이 얕아지면서 수치적으로 재현된 파고가 엄밀해에 비해서 작아지는 것을 볼 수 있다. 그러나, 군속도를 맞추려고 한 경우에 재현된 파고의 오차는 컸지만 α=-0.4인 경우에는 미미한 정도였다. 선형의 Stokes파 이론에서 유도되는 천수식 (11)에 근거하여 확장형 Boussinesq 방정식에서 군속도만 정확히 맞추면 천수현상이 정확히 재현될 것이라고 판단하면 잘못이라는 것을 알 수 있다. 이와 같은 수치실험결과는 그림 2에서 예측되는 것이다.

5. 맺음말

본 연구에서 Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식에서 수심변화에 따른 파랑에너지의 변화율이 선형의 Stokes파 이론치에 근접하도록 조율계수 α값을 선택하는 경우를 검토하였다. 이론 및 수치실험 결과 천수효과가 중요하게 드러나는 경우에는 천수식의 계수 α_5값을 정확히 맞추는 α값을 선택하면 파랑의 천수 거동을 정확히 예측할 수 있음을 알 수 있었다. 그러나, 굴절, 회절, 반사가 중요하게 드러나는 경우 이 조율계수 값을 쓰면 오히려 파랑의 거동을 제대로 예측할 수 없는 문제점이 있다. 모든 경우를 다 고려해 볼 때 조율계수 값으로 α=-0.4를 사용하면 파랑의

거동을 제대로 예측할 수 있으리라고 판단된다.

6. 참고문헌

Abbott, M.B., Petersen, H.M. and Skovgaard, O. (1978). "On the numerical modelling of short waves in shallow water," *J. Hydraulic Research*, Vol. 16, pp. 173-203.

Chen, Y. and Liu, P.L.-F. (1995). "Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation," *J. Fluid Mech.*, Vol. 288, pp. 351-381.

Madsen, P.A., Murray, R. and Sorensen, O.R. (1991). "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics," *Coastal Eng.*, Vol. 15, pp.371-388.

Madsen, P.A. and Sorensen, O.R. (1992). "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly varying bathymetry," *Coastal Eng.*, Vol. 18, pp. 183-204.

Nwogu, O. (1993). "Alternative form of Boussinesq equation for nearshore wave propagation," *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol. 119, pp. 618-638.

Peregrine, D.H. (1967). "Long waves on a beach," *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp. 815-827.

運輸省港灣技術研究所, 新日本氣象海洋株式會社. (1996). 高精度波浪變形解析プログラム改良業務 : プログラム設明書 (일본어).

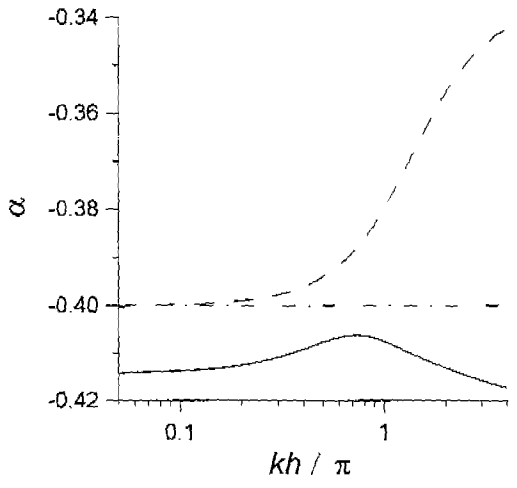

그림 1. Nwogu 식에서 상대수심에 따른 α 값의 변화; ——: α_5 의 상대오차의 제곱 값이 최소가 되는 경우, - -: C_g 의 상대오차의 제곱 값이 최소가 되는 경우, α=-0.4인 경우.

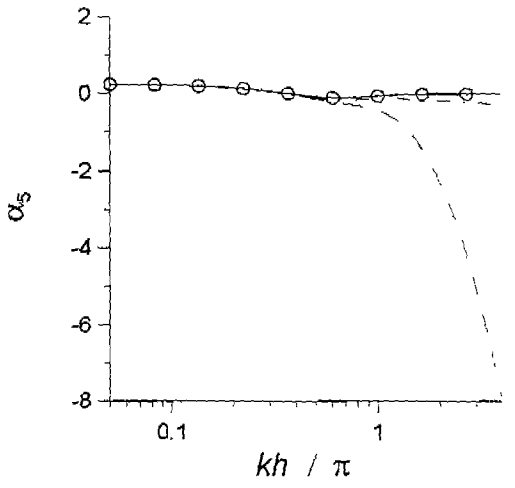

그림 2. Nwogu 식에서 상대수심에 따른 α_5 값의 변화; -o-: 선형의 Stokes파 이론치, ——: α_5 의 상대오차의 제곱 값이 최소가 되는 경우, - -: C_g 의 상대오차의 제곱 값이 최소가 되는 경우, α=-0.4인 경우.

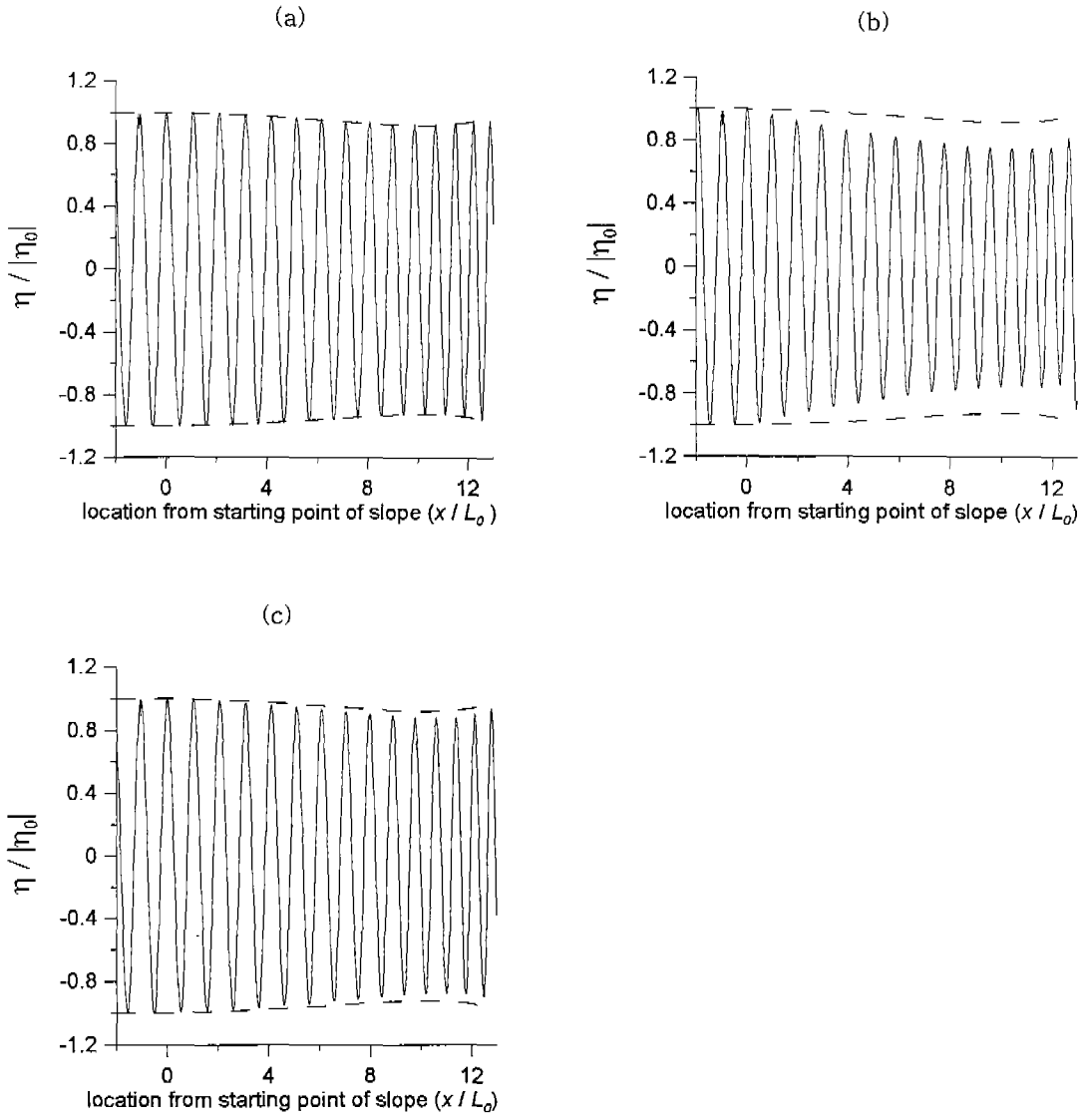

그림 3. 경사면 위로 전파하는 수면 변위; (a) α_5 의 상대오차의 제곱 값이 최소가 되는 경우, (b) C_g 의 상대오차의 제곱 값이 최소가 되는 경우, (c) α =-0.4인 경우; ——: Nwogu 식을 사용한 수치해, - - : 천수계수의 엄밀해.