

조정파라미터 공간에서의 제어계 안정한계 특성

최 순 만

STABILITY LIMIT PROPERTIES OF CONTROL SYSTEMS ON THE SPACE OF ADJUSTING PARAMETERS

S. M. Choi

ABSTRACT

The adjusting parameter set which enable control systems to locate on stability limit can be derived from theoretical or trial methods for an existing real system. The data from the results are much available to keep a system in the proper stability condition even to site engineers who are inexperienced in the control system. In this paper, a general one loop control system was adopted for a model system the process of which was assumed to consist of a time-delay element and a first order-lag element in series. After obtaining the corresponding parameter set for the model system by mathematical procedures, their loci on the parameter space was taken according to frequency change. The parameter set loci of stability limit showed unique pattern, and particularly the curves on the Kg-Ti parameter space were able to be generalized in the form of an unique exponential formula. These properties were also compared with the results taken from experimental procedures by Nyquist response method and Ziegler & Nichols method on the time domain, and both results were confirmed to be nearly same.

Key words : Stability Limit(안정 한계), Parameter Space(파라미터공간)

* 한국해양수산연수원

1. 서 론

조정파라미터의 조합에 의해서 제어계의 안정특성을 표현하게 되면 실제의 시스템에 대해 적정한 안정상태의 유지관리가 매우 용이해질 뿐 아니라¹⁾⁻³⁾ STC나 퍼지제어를 위한 설계분야에서도 활용이 가능하다⁴⁾⁵⁾.

안정한계에 해당하는 조정파라미터의 집합은 전달함수로 표현된 시스템에서 수식적인 과정을 거쳐 구하는 것 외에 이미 설치되어 있는 실 시스템의 경우는 한계감도법과 유사한 방법으로 간단히 구하거나 나이퀴스트 선도에 의한 시험을 통해서도 얻어진다.

조정파라미터가 2개 이상인 제어계에서 안정한계 상태에 놓이기 위한 조정파라미터 값들의 조합은 조정파라미터 공간에서 일정한 곡선패턴의 형태가 기대된다.

일반적인 단일루프의 제어계를 모델로 할 때 나타나는 안정한계의 이러한 곡선패턴은 제어대상의 특성에 의해 주로 지배될 것이며 제어대상의 전달함수 계수들과 조정파라미터 공간상에 나타나는 곡선패턴의 서로간에는 일반적인 성질로서의 관계가 확인될 수 있을 것이다.

본 논문은 안정한계 파라미터 조합이 나타내는 특성과 곡선패턴을 분석하기 위한 연구로서 이를 위해 단일 루프의 일반적인 모델제어계를 대상으로 PI제어에 대한 파라미터 조합을 해석하도록 한다.

2. 안정한계에서의 조정파라미터

제어대상 $G(s)$ 와 제어기 $K(s)$ 로 구성되는 단일 입출력의 직결피드백 계통을 가정할 때 제어기의 가변 조정파라미터가 p_1, p_2 2 개이고 폐회로 전달함수를 $F(s)$, 입출력 시간함수를 r, c 라 하면 이들 관계는 식(2.1)이 된다.

$$c(t) = \int_0^t f(\tau, p_1, p_2) r(t-\tau) d\tau$$

$$\text{단, } f(t, p_1, p_2) = L^{-1}[F(s)] \quad (2.1)$$

제어기의 전달함수 $K(s)$ 를 p_1, p_2 에 의한 3항 클래스 제어기 형태로 표현하면 $K(s)$ 는 식(2.2)로 되고 여기에서 $K_0(s), K_1(s), K_2(s)$ 는 고정된 전달함수를 나타낸다. p_1, p_2 는 PI 제어기의 경우 각각 비례동작 및 적분동작의 크기를 정하는 조정 파라미터이고 또한 계인을 고정한 조건에서는 PID제어기의 경우를 포함한다.

$$K(s) = K_0(s) + K_1(s)p_1 + K_2(s)p_2, \\ p_1, p_2 \in R \quad (2.2)$$

계의 제어특성은 루프전달함수 $KG(s)$ 에 의해 정해지고 이것의 미소변화분 $\Delta KG(s)$ 은 제어대상의 특성이 일정하면 편미분 선형화를 통해 식(2.3)과 같이 나타낼 수 있으며 p_1, p_2 두 파라미터의 변화에 의해서만 영향을 받는다.

$$\begin{aligned} \Delta KG(s) &= G(s) \left[\frac{\partial K(s)}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial K(s)}{\partial p_2} \Delta p_2 \right] \\ &= G(s) [K_1(s) \Delta p_1 + K_2(s) \Delta p_2] \end{aligned} \quad (2.3)$$

폐루프계가 안정한계로 되기 위한 주파수응답의 조건식은 식(2.2)로부터 식(2.4)가 된다.

$$1 + G(j\omega) [K_0(j\omega) + K_1(j\omega) p_1 + K_2(j\omega) p_2] = 0, \quad \omega \in R \quad (2.4)$$

식(2.4)에서 $G(s)$, $K_0(s)$, $K_1(s)$, $K_2(s)$ 가 허수축 상에 극을 갖는 경우의 ω 집합을 A 라고 하면 안정한계가 되기 위한 파라미터 집합 P_c 는 식(2.5)로 나타낼 수 있다.

$$P_c = \{ p = (p_1, p_2) \mid 1 + K(j\omega)G(j\omega) = 0, \omega \notin A \} \quad (2.5)$$

식(2.5)를 풀기 위하여 G , K 를 복소수 형태로 나타내면 식(2.6)과 식(2.7)과 같으며 여기에서 우변의 a , b , c_{1i} , c_{2i} 는 ω 의 함수이다.

$$G(j\omega) = a(\omega) + b(\omega)j \quad a, b \in R \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} K_i(j\omega) &= c_{1i}(\omega) + c_{2i}(\omega)j \\ c_{1i}, c_{2i} &\in R, \quad i=0,1,2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

식(2.6)과 식(2.7)로부터 식(2.4)는 식(2.8)과 같아진다.

$$H\theta p = -H\eta - e \quad (2.8)$$

여기에서

$$\begin{aligned} p &= (p_1 \ p_2)^T, \quad \eta = (c_{10} \ c_{20})^T, \\ e &= (1 \ 0)^T \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$H = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

이다.

행렬 θ 가 정칙이면 식(2.8)을 만족하는 p 의 집합 P_c 는 식(2.11)에 의해 구해진다.

$$p = \theta^{-1}(-\eta - H^{-1}e) \quad (2.11)$$

3. 모델제어계의 안정한계곡선

3.1 모델제어계

조작기와 측정기 및 제어대상으로 구성되는 단일루프의 일반적인 제어계에서 조작기와 측정기를 1차지연, 제어대상을 시간지연과 1차지연의 적으로 나타내면 모델 제어계는 Fig3.1의 블록다이어그램이 된다.

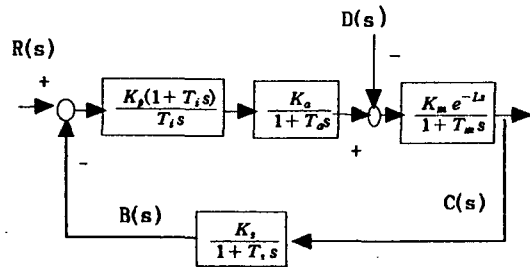


Fig.3.1 Block Diagram of Model System

K_p : 조절기 게인 [%/%]
 T_i : 조절기 적분시간 [min]
 K_a : 조작기 게인 [%/%]
 T_a : 조작기 시정수 [min]
 K_m : 제어대상 정상이득 [%/%]
 T_m : 제어대상 시정수 [min]
 L : 제어대상의 지연시간 [min]
 K_s : 센서 게인 [%/%]
 T_s : 센서의 시정수 [min]

여기에서 각 계수는 모델 시스템의 작동으로부터 T_a , T_m , L , T_s 는 1/50 [min], 1.0 [min], 1/5 [min], 1/12 [min]로, 그리고 정상이득은 $K_a=K_m=K_s=1$ 로 정한다.

3.2 안정한계 곡선

모델제어계의 루프전달함수에서 조절기를 제외한 부분을 $G(s)$ 로 나타내면 식(2.10)의 ω 에 대한 함수 a , b 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 a(\omega) &= \frac{A(\omega) \cos \omega L - B(\omega) \sin \omega L}{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \\
 b(\omega) &= \frac{-A(\omega) \sin \omega L - B(\omega) \cos \omega L}{A^2(\omega) + B^2(\omega)}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

단,

$$A(\omega) = 1 - \omega^2(T_s T_p + T_a T_s + T_a T_p)$$

$$B(\omega) = \omega(T_a + T_s + T_p - \omega^2 T_a T_s T_p)
 \tag{3.2}$$

이다.

조절기를 PI제어로 하면 $p_1=K_p$, $p_2=K_p/T_i$ 이므로 조절기의 θ 는 식(3.3)이 된다.

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\omega} \end{pmatrix}
 \tag{3.3}$$

식(2.11)에서 $\eta=(0 \quad 0)^T$,

$e=(1 \quad 0)^T$ 이므로 안정한계에서의 파라미터 집합 p 는 식(2.11)과 식(3.1)로부터 식(3.4)가 된다.

$$p = \begin{pmatrix} -A(\omega) \cos \omega L + B(\omega) \sin \omega L \\ -A(\omega) \omega \sin \omega L - B(\omega) \omega \cos \omega L \end{pmatrix}
 \tag{3.4}$$

식(3.4)에 의해 각주파수 ω 에 대한 p_1 과 p_2 의 주파수 특성을 구하면 Fig3.2와 같아진다.

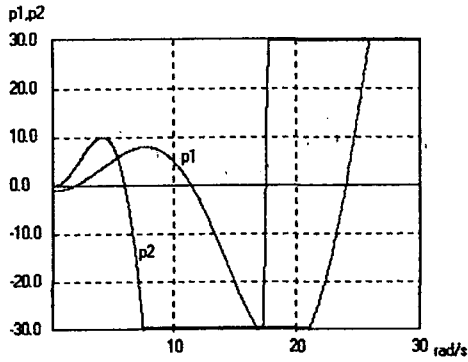


Fig.3.2 Frequency responses of p_1 , p_2 ($L=0.2$ min)

p_1 과 p_2 에 의한 안정한계 곡선을 $T_m=1.0$ [min]의 조건에서 $L=0.2$ [min], 1.0 [min], 2.0 [min]에 대해 나타내면 Fig3.3과 같이 되고 또한 Fig3.4는 $L=0.2$ [m]상태에서 T_m 의 값을 달리하여 구한 결과를 보인다.

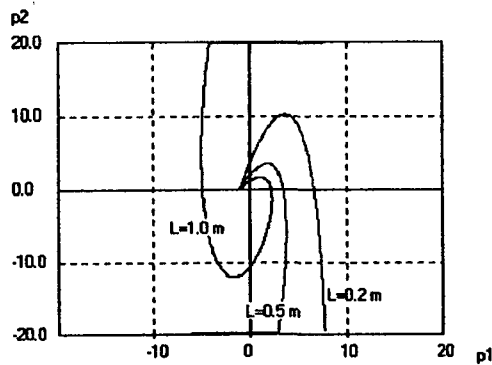


Fig.3.3 Loci by p_1 - p_2 with $L=0.2$, 0.5 and 1.0 [min] ($T_m=1.0$ [min])

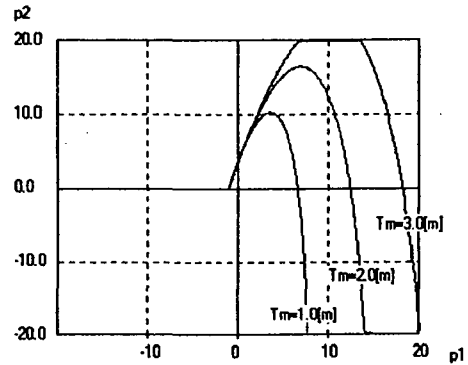


Fig.3.4 Loci by p_1 - p_2 with $T_p=0.2$ m, 0.5 m and 1.0 m ($L=0.2$ m)

파라미터 p_1 , p_2 를 식(3.5)에 의해 대응하는 조정파라미터 K_p , T_i 로 바꾸어 나타내는 경우 T_i - K_p 좌표에서의 안정한계 곡선은 Fig3.4와 같다.

$$\begin{pmatrix} K_p \\ T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{p_1}{p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

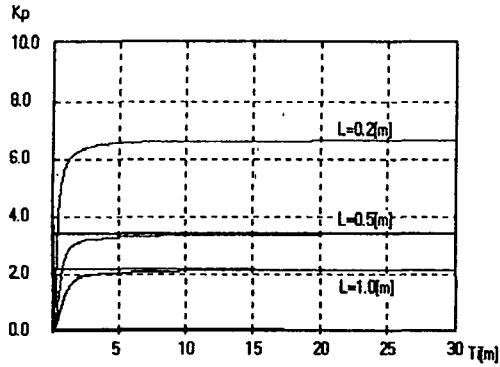


Fig.3.5 Stability limit loci by the T_i - K_p axis

4. 안정한계곡선의 분석

Fig.3.3과 Fig.3.4에서 집합 p 의 궤적은 $\omega = 0$ 일 때인 $(-1, 0)$ 의 지점을 기점으로 하고 있으며 ω 의 증가에 따라 궤적은 시계방향으로 회전하는 모양이 된다.

Fig.3.3에서 안정영역이 되기 위한 p_1 의 최대값을 p_{1m} 이라 하면 $\omega = 0$ 일 때의 양방향 p_1 값 중 최소치가 p_{1m} 이 됨을 알 수 있다.

또한 L 의 증가에 대해서 안정영역이 감소하여 제한되고 있으며 T_m 증가에 따라서 안정영역이 보다 확대됨을 나타낸다.

조정파라미터를 p_1, p_2 로부터 조정다이알에서의 실제적인 표현인 적분시간과 게인값으로 변환한 Fig.3.5의 결과에서 안정한계 곡선은 대략 식(4.1)의 지수함수 형태로 일반화할 수 있는 모양이 된다.

$$K_p = \max(K_p) [1 - \exp(-\frac{T_i}{c})] \quad (4.1)$$

이 같은 결과는 동일한 모델제어계에

대해 나이키스트 선도에 의한 방법과 시간영역에서의 한계감도법에 의해 얻어진 Fig.4.1의 결과와⁶⁾ 비교할 때 양자는 거의 일치되는 것임을 확인할 수 있다. Fig.4.1에서 K_{po} 는 안정한계곡선이고 K_{pr} 은 안정한계에서 감쇠방향의 조정으로 적정한 안정도를 나타내는 곡선이다.

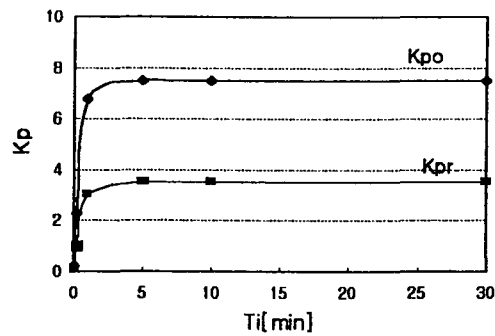


Fig.4.1 Stability limit curve by experimental result of Nyquist and Step response methods

$K_{pm} = \max(K_p)$ 라고 할 때 K_{pm} 의 값은 제어대상의 지연시간 L 과 시정수 T_m 에 의해 달라진다. Fig.4.2는 지연시간의 증가에 따른 K_p 의 변화를 나타낸 것이다.

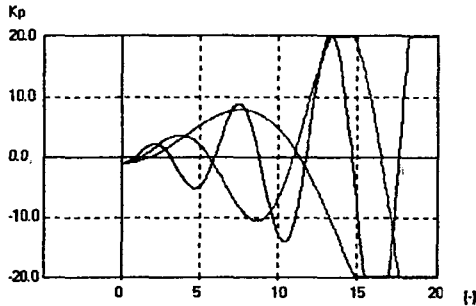


Fig.4.2 K_p variation to ω with 0.2, 0.5, and 1.0 [min] of L

K_p 는 p_1 에 해당하며 식(3.4)로부터 식(4.2)와 같이 표현된다.

$$K_p = -\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \cos(\omega L + \alpha) \quad (4.2)$$

단, 위상각 $\alpha = \tan^{-1} A(\omega)/B(\omega)$ 이다.

따라서 Fig4.2에서 K_{pm} 는 처음의 맥동 최대치가 되는 $\omega=7.5$ rad/s에서의 값으로 나타낼 수 있으며 식(4.3)이 된다.

$$K_{pm} = K_p(\omega)_{\omega=7.5} = 7.8 \quad (4.3)$$

Fig4.2에서 K_{pm} 값은 L 의 증가에 따라 크게 감소하므로 T_i - K_p 곡선에서도 안정영역이 감소되는 것이 확인되며 또한 Fig4.3에서와 같이 T_m 의 증가에 따라 K_{pm} 가 증가하는 것은 시스템의 안정 영역이 보다 넓어짐을 나타내고 있다.

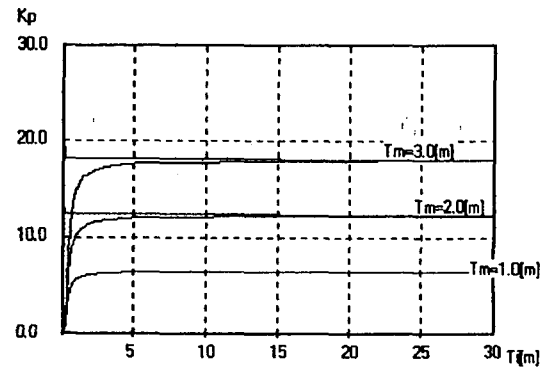


Fig4.3 T_i - K_p Curves at Stability Limit with 1.0, 2.0, and 3.0 [min] of T_m

이러한 지연시간 L 과 시정수 T_m 은 식(4.1)에서 수렴하는 값인 K_{pm} 의 크기뿐만 아니라 곡선의 전체적인 모양을 정하는 파라미터 c 의 값도 이들 값으로 정해진다. Fig3.4와 Fig.4.1의 결과에서 c 는 L 과 T_m 의 증가에 따라 같이 증가되는 양상임을 나타낸다. 또한 이와 같은 안정한계곡선에서 적정한 안정도를 얻기 위한 조정은 안정한계선으로부터 감쇠가 큰 쪽으로 적정하게 떨어진 지점의 게인 및 적분시간으로 정해줄 필요가 있다⁶⁾.

5. 결론

안정한계 조정파라미터의 조합이 나타내는 곡선패턴을 안정특성의 판별과 조정에 활용하기 위한 문제의 해석을 위해 단일루프의 일반적인 모델제어계를 정하였으며 이를 대상으로 파라미터 궤적을 수식적인 과정에 의해 구하였다. 연구에서는 이러한 곡선궤적의

형상이 나타내는 결과를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 3항 클래스제어에 의한 단일루프 제어계에서 p_1, p_2 의 조정계수에 의한 안정한계 곡선은 ω 의 변화에 대해 (-1,0) 지점을 기점으로 하여 시계방향으로 회전하는 발산형태의 형상을 나타낸다.
- 2) p_1-p_2 에 대응하는 T_i-K_p 의 변환파라미터가 그리는 한계곡선은 식(4.1)과 같은 지수함수 형태로 일반화할 수 있으며 이러한 결과는 나이퀴스트 선도에 의해서 구한 결과와 동일하게 나타났다.
- 3) 안정영역이 되기 위한 최대 게인 p_{1m} 또는 K_{pm} 은 p_1-p_2 곡선에서 $p_2=0$ 일 때의 p_1 값 중 양방향으로서 최소치가 된다.
- 4) p_1-p_2 및 T_i-K_p 영역 모두에서 제어 대상의 파라미터 L 과 T_m 에 따른 안정 영역의 변화가 잘 확인되며 적절한 안정도의 선택이 일의 적으로 정해질 수 있다.

참 고 문 헌

- 1) Hidefumu Taguchi, Masateru Doi and Mitsuhiro Araki ; "Optimal Parameters of Two-Degrees of Freedom PID Control Systems", SICE Trans.(Japanese), Vol23, No.9, p889-895, 1987
- 2) Masami Saeki and Daii Hirayama ; "Parameter Space Design Method of PID Controller for Robust Sensitivity Minimization Problem",

SICE Trans.(Japanese), Vol 32, No.12, p1612-1619, 1996

- 3) Yyou Kondo, Shinji Hara and Takuji Kaneko ; "Parameter Space Design for H_∞ Control", SICE Trans.(Japanese), Vol 27, No.6, p714-716, 1990

4) P.J.Gawthrop ; "Self-Tuning PID Controllers - Algorithms and Implementation", IEEE Trans. Automatic Control, AC-31-3, p201-209, 1986

5) T.Yamamoto, S.Omatu and H.Ishihara ; "A Construction of Self-Tuning PID Control Algorithm and Its Applications", Proceedings of SICE '89, ES15-1, p1143-1146, 1989

6) 최순만 ; "조정파라미터 공간에서의 제어계 동작점과 안정성에 관한 연구", 한국박용기관학회지, 제24권 제4호, pp470-477 (2000)