

효율적인 복합재료구조물의 delamination buckling 해석기법에 관한 연구

황재웅* · 김용협*

A Study on Efficient Analysis of Delamination Buckling of Composite Structures

Jae Woong Hwang , Yong Hyup Kim

Key Words: finite element, mesh superposition technique, delamination buckling

Abstract

A mesh superposition technique is presented for an efficient analysis of structural behavior. Refined child mesh is superimposed over parent elements for the region of interest. It is a kind of adaptive mesh refinement, which allows locally refined mesh without introducing transition region or multipoint constraints. Proper boundary condition is necessary to avoid redundant rigid body motion and kinematic compatibility between neighbor elements. Delamination buckling analysis is conducted to demonstrate accuracy and efficiency of the present method.

1. 서론

적응분석(adaptive analysis)은 오차가 큰 일부 영역에 자유도를 국부적으로 증가시키고 그에 따라 계산결과를 향상시켜 이산화 오차를 줄이는 기법으로 공학자나 수학자들 모두에게 중요하게 인식되어왔다.

적응분석 방법으로 기존에 여러 가지 접근방법이 시도되었는데, 그 중에서 주요한 기법으로는 다항식의 차수 p 는 고정시키고 일부 요소의 크기를 작게 함으로써 오차를 줄이는 h -version[1], 일부 요소의 크기는 고정시키고 다항식의 차수 p 를 증가시키는 방법으로 오차를 줄이는 p -version[2], h -version과 p -version을 결합한 h - p version[3] 등이 있다. 이러한 적응 격자 세밀화 기법을 적용할 때는 과도 요소나 다중점 구속을 사용하게 되는데, 이러한 방법은 적용의 어려움과 격자 비틀림으로 인한 문제점을 수반 하

게 된다.

J. Fish는 고차의 hierarchical element를 중첩시키는 방법으로 오차를 줄이는 s -version을 제시하였다.[4] 여기서 중첩된 영역의 다항식의 차수는 증가하게 되고, 기존의 격자와는 상관없이 중첩이 이루어질 수 있으나 해의 수렴성에 있어서 문제점을 안고 있다.

본 논문에서는 적응 분석의 하나로 요소 중첩을 이용한 요소 세밀화 기법을 제시하였고 이를 이용하여 효과적인 좌굴 해석을 수행하였다. 본 논문에서 제시한 요소 세밀화 기법은 Y.H. Kim et al.[5] 이 제시한, 과도요소나 다중점구속을 사용하지 않는 요소 중첩 기법을 바탕으로 하였다.

Fig. 1 에서와 같은 층간 분리가 있는 구조물을 해석할 경우 Fig. 1(a)와 같은 성긴 격자로는 균열 끝의 응력 특이 현상을 적절히 표현하기 어려우므로 그 부분의 요소를 좀더 세밀화할 필요가 있다. 원하는 부분의 요소 수를 증가시키기 위해서는 Fig. 1(b)와 같이 불필요한 부분의 요소 수도 증가하게 된다. 그러나, 본 논문에서 제안한

* 서울대학교 항공우주공학과

요소 중첩법을 사용하면 Fig. 1(c)와 같이 필요한 부분만 세밀한 격자를 배치하여 효율적인 해석을 수행할 수 있다.

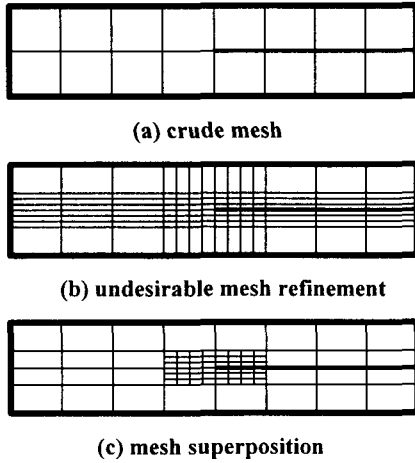


Fig. 1 Mesh Refinement

2. 유한요소 정식화

본 연구에서는 변위장과 독립 변형도장을 가정한 3차원 혼합 유한요소를 사용하였다. 한 개의 요소에는 두께 방향으로 2개의 절점이 있으며 요소의 윗면과 아랫면에 각각 9개씩, 총 18개의 절점이 있다. 각 절점에서는 3개의 변위 (u_1 , u_2 , u_3) 만을 자유도로 정의하며, 회전 자유도는 위, 아랫면의 변위의 차이로 표시된다. 따라서 한 개의 요소는 총 54개의 자유도를 갖는다.

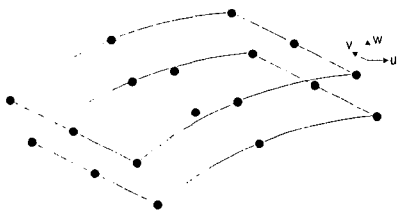


Fig. 2 18-node Solid Element

2.1 요소 중첩기법의 유한요소 정식화

그림과 같이 원래의 초기 요소를 모요소(parent mesh)라 하고 중첩시키는 요소를 자요소(child mesh)라 하기로 한다. Fig. 3는 4×4 모요소의

하나의 요소에 2×2 의 자요소를 중첩시킨 경우이다.

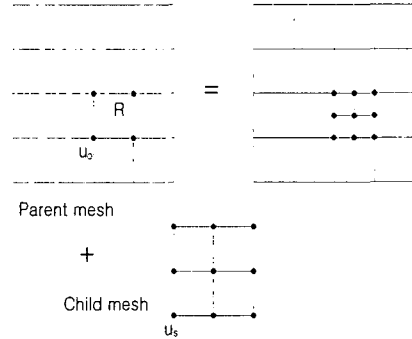


Fig. 3 Mesh Superposition Technique

혼합 유한요소에 있어서, 요소 중첩 기법의 기본적인 가정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_s \\ &= \mathbf{N}_o \mathbf{q}_o + \mathbf{N}_s \mathbf{q}_s \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 하첨자 o와 s는 각각 모요소와 자요소를 나타내며 \mathbf{N} 은 형상함수 행렬을 나타낸다. 즉, 식(1)은 임의의 점에서 변위(displacement)는 모요소와 자요소의 변위의 합으로 이루어짐을 나타낸다.

마찬가지로, 변위장으로부터 계산된 변형도는 변위의 미분으로 얻어지므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\epsilon}} &= \overline{\boldsymbol{\epsilon}}_o + \overline{\boldsymbol{\epsilon}}_s \\ &= \mathbf{B}_o \mathbf{q}_o + \mathbf{B}_s \mathbf{q}_s \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 \mathbf{B} 는 각 절점의 자유도 \mathbf{q} 와 변형도를 매개하는 행렬이다.

한편, 독립 가정 변형도는 다음과 같이 자요소에서만 가정한다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}_s \\ &= \mathbf{P}_s \mathbf{a}_s \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 \mathbf{P} 는 독립 변형도 행렬(assumed strain matrix), \mathbf{a} 는 독립 변형도 계수(assumed strain parameter)를 나타낸다.

식 (2)와 (3)을 이용하면 Hellinger-Reissner principle에 기초한 assumed strain formulation

은 다음의 두 개의 방정식으로 이루어진다.

◎ 평형방정식 (equilibrium equation)

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \delta W \\ &= \int_V (\delta \mathbf{q}_o^T \mathbf{B}_o^T + \delta \mathbf{q}_s^T \mathbf{B}_s^T) \mathbf{C} (\mathbf{P}_s \mathbf{a}_s) dV - \delta W \\ &= \delta \mathbf{q}_o^T \left(\int_V \mathbf{B}_o^T \mathbf{C} \mathbf{P}_s dV \right) \mathbf{a}_s \\ & \quad + \delta \mathbf{q}_s^T \left(\int_V \mathbf{B}_s^T \mathbf{C} \mathbf{P}_s dV \right) \mathbf{a}_s - \delta W = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

◎ 동차 방정식 (compatibility equation)

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV \\ &= \int_V \delta \mathbf{a}_s^T \mathbf{P}_s^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_o \mathbf{q}_o + \mathbf{B}_s \mathbf{q}_s - \mathbf{P}_s \mathbf{a}_s) dV \\ &= \delta \mathbf{a}_s^T \left(\int_V \mathbf{P}_s^T \mathbf{C} \mathbf{B}_o dV \right) \mathbf{q}_o \\ & \quad + \delta \mathbf{a}_s^T \left(\int_V \mathbf{P}_s^T \mathbf{C} \mathbf{B}_s dV \right) \mathbf{q}_s \\ & \quad - \delta \mathbf{a}_s^T \left(\int_V \mathbf{P}_s^T \mathbf{C} \mathbf{P}_s dV \right) \mathbf{a}_s = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

이때 각각

$$\mathbf{G}_{so} = \int_V \mathbf{P}_s^T \mathbf{C} \mathbf{B}_o dV \quad (6)$$

$$\mathbf{G}_{ss} = \int_V \mathbf{P}_s^T \mathbf{C} \mathbf{B}_s dV \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_{ss} = \int_V \mathbf{P}_s^T \mathbf{C} \mathbf{P}_s dV \quad (8)$$

이라 하고 정리하면, 식(5)로부터 \mathbf{a}_s 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{H}_{ss}^{-1} (\mathbf{G}_{so} \mathbf{q}_o + \mathbf{G}_{ss} \mathbf{q}_s) \quad (9)$$

식(9)를 식(4)에 대입하고 이를 행렬 형태로 정리하면 다음과 같은 최종 지배 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{so}^T \mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{G}_{so} & \mathbf{G}_{so}^T \mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{G}_{ss} \\ \mathbf{G}_{ss}^T \mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{G}_{so} & \mathbf{G}_{ss}^T \mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{G}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_o \\ \mathbf{q}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_o \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서 \mathbf{F}_o 와 \mathbf{F}_s 는 식 (11)와 같이 표현되는 모요소와 자요소의 하중항(external force term)이다.

$$\delta W = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_o & \delta \mathbf{q}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_o \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix} \quad (11)$$

2.2 경계 조건

요소 중첩 기법은 모요소와 자요소 사이에 적절한 경계조건을 부과함으로써 원하는 자유도를 얻고 안정성을 확보하게 된다.

Fig. 4 에서 Ω^o 는 초기 유한요소로써 모요소이고, Ω^s 는 Ω^o 내에 있는 부속영역으로써 요소 중첩에 의해 향상된 해를 구하고자 하는 영역이다. Γ_{gi} 는 essential boundary condition이 부과되는 경계면이고, Γ_{hi} 는 natural boundary condition이 부과되는 경계면이다.

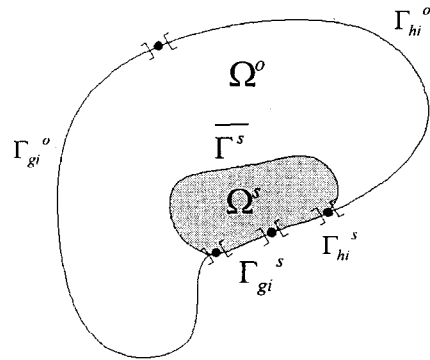


Fig. 4 Superposed Domain

$\bar{\Gamma}^s$ 는 Fig. 4 에서 보는 바와 같이 Ω^o 의 내부에 있는 Ω^s 의 경계의 일부분을 나타낸다. 즉, Ω^s 와 $\Omega^o - \Omega^s$ 사이의 경계면이다. 여기서, $\bar{\Gamma}^s$ 를 경계로 변위장의 연속성을 위해서 $\bar{\Gamma}^s$ 에서 $\mathbf{u}_s = 0$ 이어야 한다[5].

2.3 요소 중첩법을 이용한 좌굴 해석

일반적인 좌굴 문제는 다음과 같은 고유치 문제로 표현될 수 있다.

$$[\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}^\sigma] \boldsymbol{\Phi} = 0 \quad (12)$$

\mathbf{K} : stiffness matrix

\mathbf{K}^σ : initial stress stiffness matrix

이때 initial stress stiffness matrix는 다음과 같이 구성된다.

$$K^{\sigma} = \int_V \delta \eta^T C {}^{\circ} \epsilon dV \quad (13)$$

요소 증첩법을 사용할 경우, 초기 변형도는 독립 가정된 변형도장으로부터 다음과 같이 표현된다.

$${}^{\circ} \epsilon = P_s {}^{\circ} \alpha_s \quad (14)$$

또한 $\delta \eta$ 는 변위장으로부터 계산된 변형도 일부의 변분 벡터로서 식(15)과 같이 정의된다.

$$\delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \right) \quad (15)$$

여기에 식(1)의 가정을 대입하여 정리하면 $\delta \eta$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Delta u_{ok}}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_{ok}}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_{ok}}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_{ok}}{\partial x_j} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \Delta u_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_{sk}}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_{sk}}{\partial x_j} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \Delta u_{ok}}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_{sk}}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_{ok}}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_{sk}}{\partial x_j} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \Delta u_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_{ok}}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_{ok}}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

식(16)에서 4개의 항을 위로부터 각각 $\delta \eta_o$,

$\delta \eta_s$, $\delta \eta_c$, $\delta \eta_c^T$ 라하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \eta^T C {}^{\circ} \epsilon dV \\ & = \int_V \delta \eta_o^T C {}^{\circ} \epsilon dV + \int_V \delta \eta_s^T C {}^{\circ} \epsilon dV \quad (17) \\ & + \int_V \delta \eta_c^T C {}^{\circ} \epsilon dV + \int_V \delta \eta_c C {}^{\circ} \epsilon dV \end{aligned}$$

이를 행렬 형태로 정리하면 다음과 같은 형태의 initial stress stiffness matrix를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} K^{\sigma} & = \begin{bmatrix} K_o^{\sigma} & K_c^{\sigma} \\ K_c^{\sigma T} & K_s^{\sigma} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \int_V \delta \eta_o^T C {}^{\circ} \epsilon dV & \int_V \delta \eta_c^T C {}^{\circ} \epsilon dV \\ \int_V \delta \eta_c C {}^{\circ} \epsilon dV & \int_V \delta \eta_s^T C {}^{\circ} \epsilon dV \end{bmatrix} \quad (18) \end{aligned}$$

3. 수치해석

3.1 층간 분리가 있는 복합재료 구조물의 좌굴 하중 해석

Fig. 5 과 같은 층간 분리(delamination)가 존

재하는 복합재료 사각 평판의 좌굴 하중을 계산 하는데 본 기법을 적용하여 보았다. 시편은 양단에서 압력하중을 받으며 대칭성을 이용하여 1/4을 모델링 하였다. 시편의 재질과 형상은 Table 3 과 4 에 나타내었다.

좌굴거동에 있어서 좌굴 하중을 구할 때 균열의 끝부분에 응력 특이(stress singularity) 현상이 나타나게 되므로 이 부분의 요소 세밀화를 필요로 한다. 이 문제의 경우 층간 분리가 증첩면에서 떨어져 있으므로 층간분리의 윗부분이 먼저 좌굴하는 local buckling 현상이 발생하게 된다. 따라서 이 부분의 요소 세밀화 또한 필요하게 된다.

Fig. 6 에 제시된 값들은 층간 분리가 없고 같은 형상을 가진 시편의 좌굴하중으로 층간 분리가 있는 시편의 좌굴하중을 무차원화한 것이다. 해석 결과에서 보듯이, 본 기법을 적용함으로써 적은 수의 요소를 사용하여 좀더 향상된 수렴성을 확인할 수 있었다.

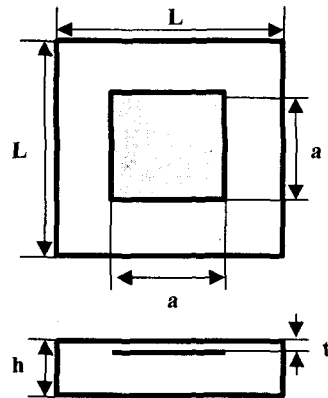


Fig. 5 Clamped Composite Square Plate with built-in delamination

Table 3 Material Property for Carbon Unidirectional Composites

E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{23}	ν_{12}
121.1GPa	8.137GPa	4.747GPa	3.551GPa	0.29

Table 4 Geometry of Composite Specimen

L	a	h	t
0.4	0.2	0.004	0.0004

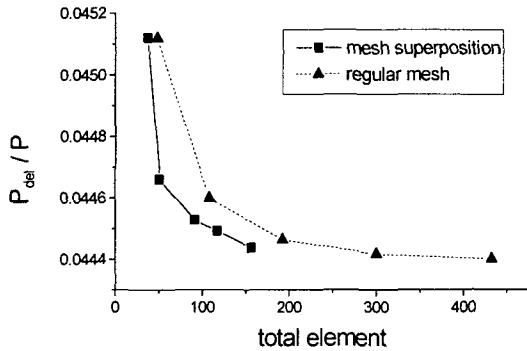


Fig. 6 Convergence Curve

4. 결론

본 논문에서는 요소 중첩법을 통한 효율적인 유한요소 해석기법을 제시하였으며, 이를 복합재료 구조물의 delamination buckling 문제에 적용함으로써 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 모요소와 자요소 사이에 적절한 경계조건을 부과하면 변위장의 연속성을 유지한 채 국부적으로 자유도를 증가시킬 수 있다.

(2) 자요소의 중첩기법을 이용하면 국부적으로 자유도를 증가시킬 수 있으므로 적은 수의 요소를 사용하면서도 해의 수렴성을 높일 수 있다.

따라서 본 논문에서 얻어진 결과를 이용하면 유한요소를 이용한 구조 해석에서 국부적으로 세밀한 격자를 배치하여 효율적인 해석 결과를 얻을 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", Int. J. Num. Meth. Eng. 24, 337-357, 1987
 [2] Zienkiewicz, O.C. and Craig, A.W, "Adaptive

mesh refinement and a posteriori error estimation for the p version of the finite element ". In: Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations(Eds. I. Babuska et al.). New York: John Wiley, pp.25-59, 1986
 [3] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z and Gong, N.G. "Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method", Int. J. Num. Eng. 28, 879-891, 1989
 [4] J. Fish, "The s-version of the finite element method", Computers and structures, vol.43, n.43, May3, pp.539-547, 1992
 [5] Yong H. kim, Itzhak Levit, and Gary Stanley, "A finite element adaptive mesh refinement technique that avoids multipoint constraints and transition zones", Iterative Equation Solvers for Structural, Mechanics Problem.(edited by I. D. Parsons and B. nour-Omid), ASME CED-Vol. 4, 1991