

반평면 전단하중력을 받는 곡면형상을 가지는 폼과 복합재료 접합부의 계면크랙에 관한 연구

박상현* · 신재윤* · 전흥재**

The Curved Interfacial Crack Analysis between Foam and Composite Materials under Anti-plane Shear Force

S. H. Park, J. Y. Shin, and H. -J. Chun

Key Words: Stress intensity factor, Viscoelasticity, Curved interfacial crack

Abstract

The general solution of the anti-plane shear problem for the curved interfacial crack between viscoelastic foam and composites was investigated with the complex variable displacement function and Kelvin-Maxwell model. The Laplace transform was applied to treat the viscoelastic characteristics of foam in the analysis. The stress intensity factor near the interfacial crack tip was predicted by considering both anisotropic and viscoelastic properties of two different materials. The results showed that the stress intensity factor increased with increasing the curvature of the curved interfacial crack and it also increased and eventually converged to a specific value with increasing time.

1. 서론

코어(core)와 복합재료스킨(composite skin)으로 이루어진 샌드위치 구조물(sandwich structure)은 샌드위치 패널(Panel) 구조물이 가지는 높은 굽힘 강도, 내충격성 등의 우수한 특성을 가지고 있으므로 여러 산업분야에 널리 활용되고 있다. 샌드위치 구조물중 폼코어 샌드위치 구조물은 폼코어가 기존의 하니콤(honeycomb)코어 보다 수분에 의한 영향이 적고 전파투과성이 좋아 항공기의 레이돔(radome)과 같은 기능성 구조물로도 연구가 진행되고 있다. 그러나 이러한 샌드위치 구조물의 경우, 두 재료의 접합부에 계면크랙이 발생하기 쉬운 문제점을 가지고 있으며, 곡면형상 등의 복잡한 형상으로 사용될 경우 제작시 접합부의 초기결합에 의해 계면 크랙이 발생 할

가능성은 더욱 높아진다. 지금까지 다양한 재료들 사이의 계면크랙에 대한 응력세기계수와 응력분포 등을 예측하는 연구가 이루어져 왔으며[1-3], 특히 Chang[4]은 점탄성 재료의 특성을 고려하여 점탄성 재료사이의 계면크랙에서 응력세기 분포가 시간에 따라 증가함을 보여주었다.

본 논문에서는 곡면형상을 가지는 폼과 복합재료 접합면상의 계면크랙과 먼 거리에 일정한 반평면(anti-plane) 전단력이 가해지는 경우에 대해 복소변수 변위함수(complex variable displacement function) 및 Kelvin-Maxwell의 점탄성을 나타내는 모델을 이용하여 폼의 점탄성 및 복합재료의 이방성을 고려한 계면크랙의 응력세기계수를 예측하였다.

2. 이론

곡면형상의 접합면을 가지는 폼(S^-)과 보강섬유 방향이 θ 축과 일치하는 복합재료(S^+)의 이중재료가 반평면 전단(antiplane shear)하중력을 받을

* 연세대학교 기계공학과 대학원

** 연세대학교 기계·전자공학부

때, [Fig. 1]에 도시된 r, θ 좌표계를 이용하면 변형률-변위 관계식, 응력-변형률 관계식, 그리고 평형방정식은 다음과 같다.

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (1)$$

$$\tau_{rz} = C_{44} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \tau_{\theta z} = C_{55} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (2)$$

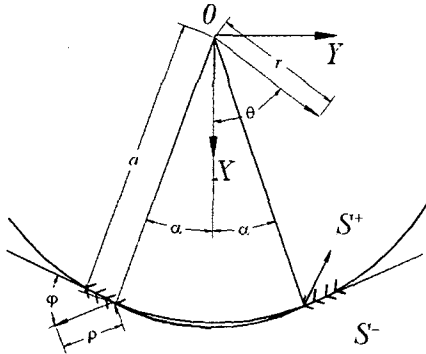
$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (3)$$

$u_z(r, \theta)$ 는 식(3)의 일반해로 다음과 같이 나타낼 수 있다.[5]

$$u_z(r, \theta) = [W(z_3) + \overline{W(z_3)}] \quad (4)$$

여기서 $z_3 = \left(\frac{r}{a}\right)^{-i\xi-1} re^{i\theta}$, 그리고 a 는 곡면 형상을 가지는 크랙의 곡률반경이며, ξ 는 다음과 같은 특성방정식의 근으로 구할 수 있다.

$$C_{44}\xi^2 + C_{55} = 0 \quad (5)$$



[Fig. 1] Geometry and coordinates of curved interfacial crack between foam and composites

폼은 일반적으로 시간에 따라서 재료의 물성치가 변화하는 점탄성 특징을 가지고 있으며, 시간에 의존하는 강성계수 $C_{ijkl}(t)$ 를 이용하여 응력-변형률관계를 표시한다. 시간의 함수로 나타나는 강성계수는 일반적으로 감쇠시간(λ)을 이용하여 다음 식으로 표현한다.

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl}^1 e^{-t/\lambda} + C_{ijkl}^0 \quad (6)$$

시간변수에 대한 라플라스 변환을 이용하여 점탄성 재료의 응력-변형률 관계를 다음과 같이 표현

한다.

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{C}_{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl} \quad (7)$$

여기서 \hat{F} 는 $F(t)$ 의 라플라스 변환 형태를 의미한다.

식(7)과 라플라스 변환을 이용하면 식(5)는 다음과 같이 시간을 고려한 강성계수의 라플라스 변환형태가 된다

$$\hat{C}_{44}\xi^2 + \hat{C}_{55} = 0 \quad (8)$$

이제 다음과 같은 함수 $\hat{\Phi}(z_3)$ 를 도입한다.

$$\hat{\Phi}(z_3) = \frac{\sqrt{\hat{C}_{55} \hat{C}_{44}}}{\hat{C}_{44}} z_3 \frac{d\hat{W}(z_3)}{dz_3} \quad (9)$$

$\hat{\Phi}(z_3)$ 를 이용하면 응력과 변형률 성분들은 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\hat{\tau}_{rz} = \frac{1}{r} [\hat{\Phi}(z_3) + \overline{\hat{\Phi}(z_3)}] \quad (10)$$

$$\hat{\tau}_{\theta z} = \frac{1}{r} [\xi \hat{\Phi}(z_3) + \overline{\xi \hat{\Phi}(z_3)}] \quad (11)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \theta} = \frac{i}{\hat{\mu}} [\hat{\Phi}(z_3) - \overline{\hat{\Phi}(z_3)}] \quad (12)$$

여기서 $\hat{\mu} = \sqrt{\hat{C}_{55} \hat{C}_{44}}$

한편, 접합면의 크랙상에서 경계조건은 다음과 같이 나타난다.

$|z| = a, |\theta| > \alpha$ 일때,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hat{\mu}_1} [\hat{\Phi}_1(z) - \overline{\hat{\Phi}_1(z)}] \\ &= \frac{1}{\hat{\mu}_2} [\hat{\Phi}_2(z) - \overline{\hat{\Phi}_2(z)}] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{\Phi}_1(z) + \overline{\hat{\Phi}_1(z)} = \hat{\Phi}_2(z) + \overline{\hat{\Phi}_2(z)}$$

$|z| = a, |\theta| < \alpha$ 일때,

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(z) + \overline{\hat{\Phi}_1(z)} &= a \hat{\tau}(z) \\ \hat{\Phi}_2(z) + \overline{\hat{\Phi}_2(z)} &= a \hat{\tau}(z) \end{aligned} \quad (14)$$

표면 장력이 존재하지 않는 경우에 식(14)로부터 새로운 두 함수 $\hat{\Psi}(z), \hat{\Theta}(z)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
z \in S^+ \quad \Psi(z) &= \hat{\Phi}_1(z) \\
\hat{\Theta}(z) &= \hat{\Phi}_2(z) \\
z \in S^- \quad \Psi(z) &= -\overline{\hat{\Phi}_1\left(\frac{a^2}{z}\right)} \\
\hat{\Theta}(z) &= -\overline{\hat{\Phi}_2\left(\frac{a^2}{z}\right)}
\end{aligned} \quad (15)$$

위 식(15)와 경계조건식(13), (14)를 이용하면 $\Psi(z)$ 와 $\hat{\Theta}(z)$ 에 대한 Hilbert problem[6]이 되며, $\Psi(z)$ 와 $\hat{\Theta}(z)$ 의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= \frac{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2} \left[\frac{\hat{P}(z)}{\hat{\mu}_2} + \hat{\chi}_0(z) \hat{R}(z) \right] \\
\hat{\Theta}(z) &= \frac{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2} \left[\frac{\hat{P}(z)}{\hat{\mu}_1} - \hat{\chi}_0(z) \hat{R}(z) \right]
\end{aligned} \quad (16)$$

여기서

$$\begin{aligned}
\hat{P}(z) &= \sum_{k=-1}^{\infty} D_k z^k, \quad \hat{R}(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} C_k z^k \\
\hat{\chi}_0(z) &= (z - ae^{i\alpha})^{-1/2} (z - ae^{-i\alpha})^{-1/2}
\end{aligned}$$

식(16)에서 $\Psi(z)$ 와 $\hat{\Theta}(z)$ 의 변수 z 를 z_3 로 대체하고 식(15)와 식(2)를 이용하여 $\hat{P}(z_3)$ 와 $\hat{R}(z_3)$ 의 계수를 결정하면 응력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{rz}^{(k)} &= \frac{\hat{\tau}^0 a}{(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)r} \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mu}_k \left(\frac{z_3}{a} e^{-i\beta} - \frac{a}{z_3} e^{i\beta} \right) - \hat{\mu}_1 a \chi_0(z_3) \left[\left(\frac{a}{z_3} - \cos \alpha \right) e^{i\beta} + \frac{z_3}{a} \left(\cos \alpha - \frac{z_3}{a} \right) e^{-i\beta} \right] \right\}, \\
\hat{\tau}_{\theta z}^{(k)} &= \frac{\hat{\tau}^0 a}{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 r} \operatorname{Re} \left\{ \zeta_k \hat{\mu}_k \left(\frac{z_3}{a} e^{-i\beta} - \frac{a}{z_3} e^{i\beta} \right) - \zeta_k \mu_1 a \chi_0(z_3) \left[\left(\frac{a}{z_3} - \cos \alpha \right) e^{i\beta} + \frac{z_3}{a} \left(\cos \alpha - \frac{z_3}{a} \right) e^{-i\beta} \right] \right\}
\end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $k=1, 2$ 이고, 각각 복합재료(S^+)와 폼(S^-)을 의미한다. 크랙선단 응력장에서의 응력을 구하기 위하여 점근적 급수전개(asymptotic expansion)[7]를 처음 세 개의 항까지 구한다.

$$\hat{\tau}_{\gamma z}^{(k)} = \sum_{i=1}^3 A_i \rho^{s_i} \hat{\tau}_{\gamma z}^{(k)}(\varphi) \quad (18)$$

여기서 $\gamma = r, \theta$, $k = 1, 2$, 그리고 $O(\sqrt{\rho})$,

$$s_1 = -\frac{1}{2}, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \frac{1}{2} \quad \text{이다.}$$

식(18)로부터 얻은 응력의 첫 번째 항으로부터 응력세기계수 K_{III} 를 정의할 수 있으며, 이로부터 응력은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{rz}^{(k)} &= \frac{\hat{K}_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi\rho}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \zeta_k \sin \varphi}} \right] \\
\hat{\tau}_{\theta z}^{(k)} &= \frac{\hat{K}_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi\rho}} \operatorname{Re} \left[\frac{\zeta_k}{\sqrt{\cos \varphi + \zeta_k \sin \varphi}} \right]
\end{aligned} \quad (19)$$

여기서 라플라스 변환된 응력세기계수와 역변환된 응력세기계수는 각각 식(20), (21)과 같다.

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{\text{III}} &= \frac{2 \hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2} \times \\
&\sqrt{a\pi \sin \alpha} \left(\hat{\tau}_x^\infty \cos \frac{\alpha}{2} \pm \hat{\tau}_y^\infty \sin \frac{\alpha}{2} \right)
\end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
K_{\text{III}} &= 2 [S - H e^{-Q(t-t_0)}] \times \\
&\sqrt{a\pi \sin \alpha} \left(\tau_x^\infty \cos \frac{\alpha}{2} \pm \tau_y^\infty \sin \frac{\alpha}{2} \right)
\end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\sqrt{C_{44} C_{55}}}{\sqrt{C_{44} C_{55} + G_f^0}}, \\
H &= \frac{\sqrt{C_{44} C_{55}} G_f^1}{\sqrt{C_{44} C_{55} + G_f^0} \sqrt{C_{44} C_{55} + G_f^1 + G_f^0}}, \\
Q &= \frac{1}{\lambda} \frac{(\sqrt{C_{44} C_{55}} + G_f^0)}{\sqrt{C_{44} C_{55} + G_f^1 + G_f^0}}
\end{aligned}$$

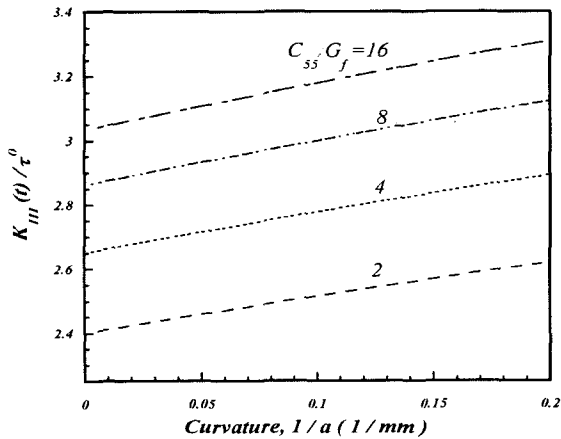
여기서 C_{ii} 는 복합재료의 전단강성계수, G_f^0 는 폼의 전단강성계수, $G_f^1 (= \nu/\lambda)$ 는 폼의 감쇠시간(λ)과 관련된 계수이다.

3. 결과 및 토의

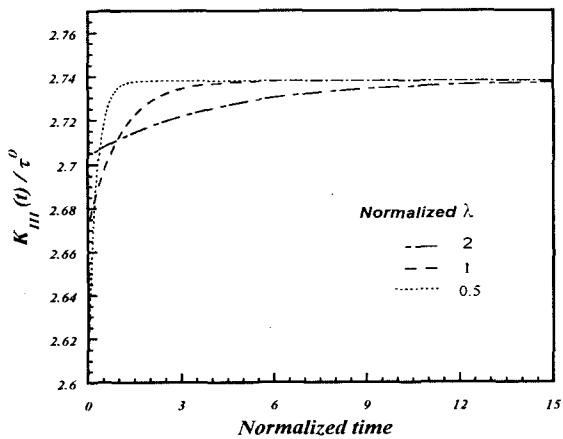
[Fig. 2]는 $|z| \rightarrow \infty$ 에서의 균일 전단응력 τ_x^∞ , τ_y^∞ 가 τ^0 로 동일 할 때 폼과 복합재료 접합면의 곡률에 따른 K_{III}/τ^0 의 변화를 나타낸다. 곡률이 증가함에 따라 K_{III} 도 점차 증가함을 보이며, 또한 복합재료와 폼의 전단강성계수의 비가 2, 4, 8, 16으로 증가할수록 K_{III} 는 크게 증가한다.

[Fig. 3]은 $|z| \rightarrow \infty$ 에서의 균일 전단응력 τ_x^∞ , τ_y^∞

가 τ^0 로 동일 할 때 크랙선단에서 시간에 따른 K_{III} 의 변화를 나타낸다. 시간이 증가함에 따라 K_{III} 는 일정기간 증가한 후 수렴한다. 시간에 따른 K_{III} 의 변화는 감쇠시간에 지배를 받는다. 감쇠시간이 2인 경우 시간에 따른 K_{III} 는 변화율은 작지만 계속적인 변화를 보인다. 그러나 감쇠시간이 0.5인 경우 K_{III} 는 초기변화율은 매우 크지만 빠르게 일정값에 수렴한다. 시간이 지남에 따라 K_{III} 가 점차 증가하는 이유는 점탄성재료인 폼의 전단강성계수가 점차 감소하여 탄성재료인 복합재료와 점탄성재료인 폼의 전단탄성계수의 비가 증가하기 때문이다.



[Fig. 2] K_{III}/τ^0 as a function of the curvature of the curved interface between foam and composite materials with various values of C_{55}/G_f ($G_f^0 : C_{44}^0 : C_{55}^0 : G_f^1 = 1 : 2.2$, $\tau_x^\infty = \tau_y^\infty = \tau^0$, $t = 0$)



[Fig. 3] K_{III}/τ^0 as a function of the normalized time with various values of λ ($G_f^0 : C_{44}^0 : C_{55}^0 : G_f^1 = 10 : 22 : 40 : 1/\lambda$, crack size : radius(a) = 1:15, $\tau_x^\infty = \tau_y^\infty = \tau^0$)

4. 결론

본 논문에서는 곡면형상의 접합면을 가지는 폼과 복합재료 사이에 존재하는 계면크랙상에서의 응력세기를 반평면 전단력이 가해지는 경우에 대해 폼의 점탄성 특성 및 복합재료의 이방성 특성을 고려하여 예측하였다. 시간이 지남에 따라 폼과 복합재료 접합면의 응력세기계수(K_{III})값은 점차 증가하였다. 또한 곡면형상을 가지는 접합면의 곡률이 증가함에 따라 응력세기계수가 점차 증가하는 경향을 보였다.

후기

본 논문은 선도기술개발사업의 지원으로 이루어진 것이므로, 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Williams, M. L., "The stresses around a fault or crack in dissimilar media", Bull. Seismol. Soc. Amer., vol. 49, 1959, pp. 199-204
- (2) Hwu, C., "Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks", Engineering Fracture Mechanics, vol. 45, 1993, pp. 89-97
- (3) Ting, T. C., "Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites", Int. J. Solids Structures., vol. 22, 1986, pp. 965-983
- (4) Chang, R. C., "Viscoelastic composite with a cracked layer under anti-plane shear", Theoretical and applied fracture mechanics, vol. 27, 1997, pp. 53-62
- (5) Yang, S., and Yuan, F. G., "Interfacial circular crack in cylindrically anisotropic composites under antiplane shear", Int. J. Solids Structures., vol. 32, 1995, pp. 3603-3628
- (6) Muskhelishvili, N. I., "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity", Fourth edition, P. Noordhoff, 1963
- (7) Wiktor Eckhaus, "Asymptotic analysis of singular perturbations", North-holland Co., 1979