

열-전기-기계 하중에서의 복합재 평판의 응력해석

오진호* · 조맹효**

Refined Decoupled Stress Analysis for Thermo-piezoelectric Composite Plate

Jinho Oh, Maenghyo Cho

Key Words : Piezoelectric(피에조 전기하중), Composite plates(복합재료) Higher order zig-zag theory (고차 이론)

ABSTRACT

A decoupled thermo-piezoelectric-mechanical model of composite laminates with surface bonded piezoelectric actuators, subjected to externally applied load, temperature change load, electric field load is developed. The governing differential equations are obtained by applying the principle of free energy and variational techniques. A higher order zigzag theory displacement field is employed to accurately capture the transverse shear and normal effects in laminated composite plates of arbitrary thickness.

1. 서론

최근 복합재료와 스마트 구조 재료의 발전으로 진동억제, 소음감소 등의 잠재적인 응용분야에 관심이 더 커지고 있다. 그러므로 복합재료 지능구조물의 해석시 효율적이고 정확한 모델이 요구되고 있다. 복합재 적층 구조물의 해석을 위한 연구는 지난 20년 동안 지속적으로 수행되어 왔다. 기계적인 하중을 받는 적층 구조물은 그 구조물의 횡 방향의 전단 강성이 섬유 방향의 면내 강성에 비해 매우 작으므로 횡 전단 변형이 중요하게 되고, 금속 구조물의 굽힘 변형에서는 무시되었던 횡 전단 변형 효과의 중요성이 강조된다. 따라서 보다 정확한 응력과 변형의 예측을 위해서는 횡 전단 변형 효과를 추가로 고려하는 것이 복합재료 적층 구조물에서는 중요한 요인으로 인식되어 왔다. 횡 전단 변형 효과를 고려하는 이론으로는 두께 방향으로 면내 변위가 매끈하게 변하도록 변위장을 가정하는 이론[1]과 횡 전단 응력의 연속성을 보장하도록 하는 이론[2,3,4]과 층층마다 독립적인 변위장을 가정하는 이론[5] 등이 있다. 그러나 복합재료 적층 구조물은 기계하중 하에서만 운용

되는 것이 아니라 가혹한 열 환경하에 놓여 있는 경우도 빈번하다. 그러므로 최근에는 열 하중과 기계 하중이 동시에 작용하는 복합재료 적층 구조물의 응력, 변형 및 강도의 예측은, 적층 구조물의 설계시 고려해야 할 중요한 문제가 되고 있다 [6]. 두꺼운 적층판의 경우, 기계하중 하에서는 횡 전단 변형 효과를 고려하는 것이 평판의 두께 방향 응력과 변위의 정확도를 높이는 데 중요한 요인이었지만 열하중을 받는 경우에는 같은 정도의 두께비를 가진다면 횡 수직 변형의 효과를 무시할 수 없다. 이 효과는 기계하중이 가해지는 경우에는 내부 변형 에너지에 기여하는 바가 미미하지만 열 하중하에서는 그 효과가 두드러지게 나타나므로 횡 전단 변형 에너지와 함께 동일한 정도의 중요도를 가지고 동시에 고려되어야 한다. 이 효과는 3차원 탄성해의 예를 통해서도 잘 나타나고 있다.[7,8]. 본연구에서는 기계,전기,열 하중이 연계된 복합재 적층판 구조물의 응력해석을 수행한다. 보다 정확한 거동을 예측하기 위해서 횡전단 변형과 횡 수직 변형효과를 동시에 고려하였다.

2. 정식화

2.1 Total Free Energy 와 구성방정식

열,기계,전기 하중에 의해 변형되는 구조물의 Free energy 는 다음과 같이 쓰여진다.[9]

* 서울대학교

** 서울대학교

$$F(\varepsilon_{ij}, E_i, \theta) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \frac{1}{2} b_{ij} E_i E_j - k_{ij} \theta \varepsilon_{ij} - d_i E_i \theta - \frac{1}{2} a_T \theta^2 \quad (1)$$

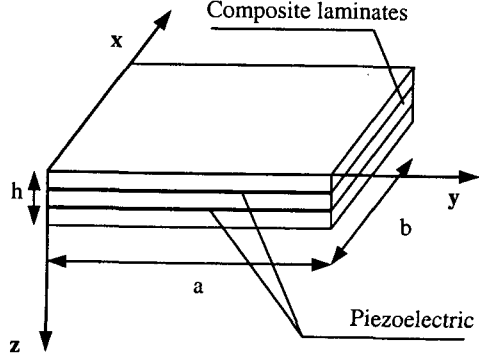


Fig 1. Configuration of the adaptive laminated composite plates

여기서, C_{ijkl} 과 e_{ijk} 은 탄성계수와 piezoelectric 상수이다. 위의 (1)식으로부터, 다음과 같이 구성 방정식들이 유도 될 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k - k_{ij} \theta$$

$$D_i = -\frac{\partial F}{\partial E_i} = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + b_{ij} E_j + d_i \theta \quad (2)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \theta} = k_{ij} \varepsilon_{ij} + d_i E_i + a_T \theta$$

D_i 와 σ_{ij} 는 응력텐서 구성성분이다.

S 는 엔트로피이고, $\theta = T - T_0$ 는 초기온도 T_0 로 부터 의 온도변화이다. E_i 는 전기장 벡터의 구성성분이다. b_{ij} 는 유전율이고, k_{ij} 와 d_i 는 열-기계 와 열-전기장의 연계 상수이다.

선형에 기초를 둔 Piezoelectricity E_i 는 스칼라 포텐셜 함수 ϕ 로서 표현된다.

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (i=1,2,3) \quad (3)$$

미소 변위와 변형을 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

Piezo 층이 있는 복합재료 적층구조물의 형상은 그림 1 에 도시되어 있다.

2.2 변위장

변위장을 효율적으로 모델링 하기 위해서 고차 지그재그이론을 사용하였다. 면내 변위장은 기계 하중이 작용할 때 두께 방향으로 전체적으로 매끈 하게 변하는 3 차의 변위장에 층마다 1 차 지그재그로 변하는 변위장을 중첩하여 변위장을 얻는다. 이때 층마다 지그재그 형상으로 변하는 변위장은 층마다 주 종속 변수를 가지므로 종속 변수의 수는 적층 수에 비례하여 늘어나게 된다.

이를 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$u_\alpha(x_\beta, z) = u_\alpha^0(x_\beta) + \psi_\alpha(x_\beta)z + \xi_\alpha(x_\beta)z^2 + \varphi_\alpha(x_\beta)z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z-z_k)H(z-z_k) \quad (5)$$

$$u_3(x_\alpha, z) = w(x_\alpha) + r_1(x_\alpha)z + r_2(x_\alpha)z^2 \quad (6)$$

여기서, $H(z-z_k)$ 은 단위 계단함수 이다.

면내 변위장의 개형은 그림 2 에 그려져 있다.

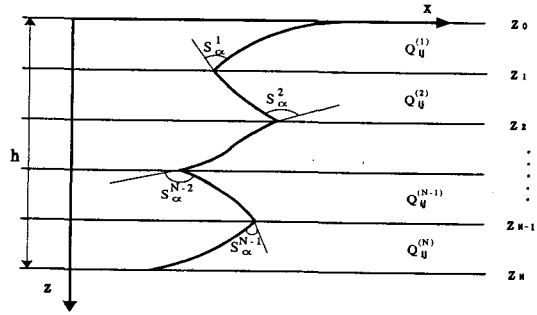


Fig 2. general lamination layup and in-plane

displacement field configurations

위의 변위장에 상, 하면에서의 횡 전단 구속 조건을 대입한다. 즉,

$$\gamma_{\alpha 3} |_{z=0} = \psi_\alpha + w_{,\alpha} = 0$$

$$\gamma_{\alpha 3} |_{z=h} = \psi_\alpha + w_{,\alpha} + 2\xi_\alpha h + 3\varphi_\alpha h^2 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k + w_{,\alpha} + r_{1,\alpha} h + r_{2,\alpha} h^2 = 0 \quad (7)$$

횡 전단 응력 연속조건을 복합재 층의 경계마다 고려하면, 층 사이의 기울기변화 S_α^k 가 다음과같이 결정된다.

$$S_\alpha^k = a_{\alpha\gamma}^k \varphi_\gamma + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma} \quad (8)$$

여기서 $a_{\alpha\gamma}^k, b_{\alpha\gamma}^k$ 의 자세한 표현식은 생략한다.

결국, 식(7), (8)을 식(5), (6)에 대입하여, 다음과 같은 변위장을 유도할 수 있다.

$$u_\alpha(x_\beta, z, t) = u_\alpha^0(x_\beta, t) - w_{,\alpha}(x_\beta, t)z$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2h} \left\{ 3\varphi_\alpha h^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_{\alpha\gamma}^k \varphi_\gamma + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma}) + \right. \\
& \left. r_{1,\alpha}(x_\beta, t)h + r_{2,\alpha}(x_\beta, t)h^2 \right\} z^2 + \varphi_\alpha(x_\beta, t)z^3 \\
& + \sum_{k=1}^{N-1} (a_{\alpha\gamma}^k \varphi_\gamma + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma})(z - z_k)H(z - z_k) \\
u_3(x_\alpha, z, t) = & w(x_\alpha, t) + r_1(x_\alpha, t)z \\
& + r_2(x_\alpha, t)z^2 \quad (9)
\end{aligned}$$

변위장에서의 변수는 기준면의 변수만으로 정의된다. 주요 변수는 $u_\alpha^0, w, \varphi_\alpha, r_1, r_2$ 이다. 그 결과, 주요변수의 수는 층의 수에 관계없이 7개로 일정하다. 위의 변위장을 가지고, 가상일의 원리에 적용하여 변분적으로 일치하는 평형 방정식과 경계 조건을 유도할 수 있다.

여기서, 결과력과 계산과정은 지면 관계상 생략한다.

3. 수치해와 결과

개발된 이론의 성능을 검증하기 위해서 정상상태의 응력과 변위를 해석하였다. 기계하중, 온도하중, 전기하중을 각각 고려하였고 완전 연계된 전기-기계-온도 하중을 고려하지 않고 decouple 된 이론을 바탕을 두고 해석을 수행 하였다. 온도-기계-전기 하중의 효과도 단지 구성방정식에서만 고려된다. 해석을 위하여 [90/0/90/0/0/90/0/90]과 [0/90/0/90/0/90/0/90/0] 직교 적층 배열, [Piezo/0/90/0/90/0/90/0/Piezo] 적층배열등 3 가지 적층 배열을 고려하였다. 삼차원 해석 결과는 참고 문헌[7]에서 얻었다. 수치예의 계산에 사용된 물성치는 Table1에 주어졌다. 본 계산에 사용된 물성치는 참고 문헌[10]에서 얻었다.

3.1 기계하중하의 응력분포

Sinusoidal 하중을 윗면에 가했을 때의 결과를 Fig3에 도시하였다. Fig3에서 보여지듯이 응력과 변형이 3 차원 탄성해와 비교해서 매우 정확히 얻어지는 것을 알 수 있다.

Table 1 Material properties used in numerical examples

Material property
[90/0/90/0/0/90/0/90]
[0/90/0/90/0/90/0/90/0]
$E_L=25 \times 10^6$
$E_T=1 \times 10^6$
$G_{LT}=0.5 \times 10^6$
$G_{TT}=0.2 \times 10^6$
$\nu_{LT}=0.25$
$\nu_{TT}=0.25$
$\alpha_{LL}=1 \times 10^{-8}$
$\alpha_{TT}=1123 \times 10^{-6}$

Material property	Material property
[Piezo/0/90/0/90/0/90/0/Piezo]	[Piezo/0/90/0/90/0/90/0/Piezo]
PZT-5A layer	Graphite-epoxy layer
$E_1=61 \times 10^9$	$E_L=181 \times 10^9$
$E_3=E_2=53.2 \times 10^9$	$E_T=10.3 \times 10^9$
$G_{12}=22.6 \times 10^9$	$G_{LT}=7.17 \times 10^9$
$G_{13}=G_{23}=21.1 \times 10^9$	$G_{TT}=2.87 \times 10^9$
$\nu_{12}=0.35$	$\nu_{LT}=0.28$
$\nu_{13}=\nu_{23}=0.38$	$\nu_{TT}=0.33$
$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1.5 \times 10^{-6}$	$\alpha_{TT}=22.5 \times 10^{-6}$
$\alpha_{33}=2.0 \times 10^{-6}$	$\alpha_{LL}=0.02 \times 10^{-6}$
$d_{31}=-171 \times 10^{-12}$	
$d_{32}=-171 \times 10^{-12}$	
$d_{33}=374 \times 10^{-12}$	
$d_{24}=584 \times 10^{-12}$	
$d_{15}=584 \times 10^{-12}$	

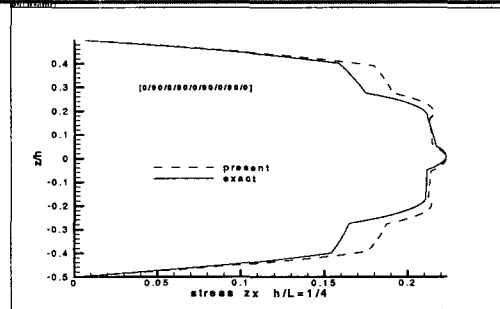


Figure 3(a) out-of-plane stress σ_{zx}

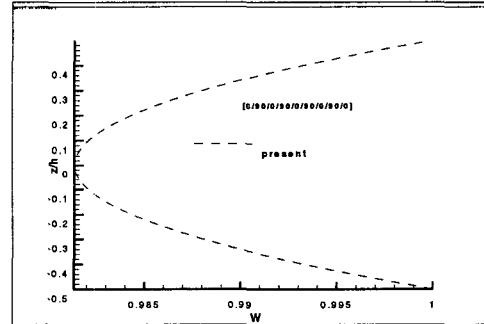


Figure 3(b) out-of-plane displacement W

3.2 온도하중하의 응력분포

두께 방향으로 선형으로 변하는 온도하중을 가했을 때의 응력을 Fig4에 도시하였다. 본 이론의 결과는 삼차원 탄성해의 결과와 비교할 만큼 정확히 응력을 예측할 수 있다.

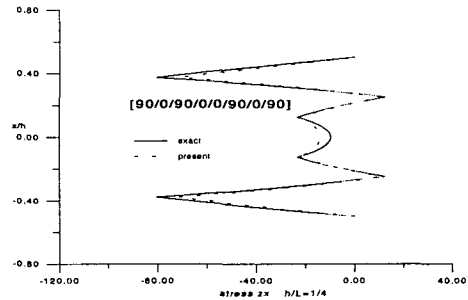


Figure 4 out-of-plane stress σ_{zx}

이 논문은 2000년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Nelson, R. B. and Lorch, D.R., "A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 41, No. 1, pp.177-183. 1974
- (2) Toledano, A. and Murakami, H. "A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 181-189. 1987
- (3) DiSciuva, M. "An Improved Shear-deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells & Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 589-596. 1987
- (4) Cho, M. and Parmerter, R.R. "Efficient Higher Order plate Theory for Laminated Composites," *Composite Structure.*, Vol. 20, pp. 113-123. 1992
- (5) Seide, P., "An Improved Approximate Theory for the Bending of Laminated Plates," *Mechanics Today*, Vol.5, pp. 451-465. 1980.
- (6) Thornton, E.A. Thermal structures for Aerospace Applications, AIAA Education Series, AIAA, 1996.
- (7) Savoia, M. and Reddy, J. N. Three dimensional thermal analysis of laminated composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, Vol32, pp593-608 1995
- (8) Cho, M. and Park, H.S. Comments on "Three-dimensional Thermal Analysis of Laminated Composite Plates" *Int. J. Solids Structures*. Vol. 34, No.35-36, pp. 4633-4651 1997
- (9) Aditi, Chattopadhyay. and Li, Jingmei. "Coupled Thermo-Piezoelectric-Mechanical Model for Smart Composite Laminates. *AIAA. J* Vol.37, No. 12 December 1999.
- (10) Tang, Y.Y. and Noor, A.K. "Assessment of Computational Models for Thermoelastic Multilayered Plates" *Computer & Structures* Vol. 61, No. 5, pp 915-933, 1996

3.3 전기하중하의 응력분포

평판의 윗면과 아래면에 Piezo 층을 부착해서 전기하중을 가했을때의 응력분포를 해석하였다. 예상대로 위아래 symmetric 하게 하중을 주었기 때문에, Fig5 와 같이 대칭적인 응력분포가 나타난다.

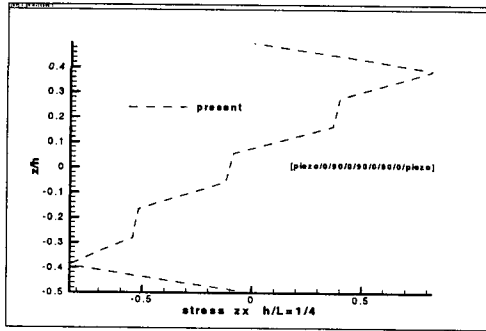


Figure 5 out-of-plane stress σ_{xz}

3.4 세가지 하중에 대한 처짐 비교

세 가지 하중 즉 기계, 전기, 열 하중이 가해질때의 두께 방향의 처짐을 Fig 6.에 비교하였다. 기계하중의 경우 두께를 통해 처짐이 거의 일정하게 나타나지만, 열하중의 경우는 두께의 위치에 따라 처짐값이 변하였고, 전기하중의 경우도 무시할 수 없을 정도의 두께 방향 변형이 나타났다. 그러므로 횡 수직 방향의 변형을 고려하는 것이 중요하다는 것을 확인할 수 있었다.

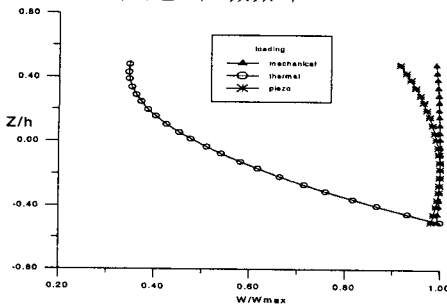


Figure 6 out-of plane-displacement w $h/L=1/10$

4. 결론

본 연구는 고차 지그재그 이론을 사용하여, 기계, 전기, 열 하중이 작용할 때, 복합 적층 구조물의 변형과 응력에 대해 해석하였다. 그 결과, 복합재료가 열하중과 전기하중을 받을 때, 두께 방향 변형을 무시할 수 없다는 것을 확인할 수 있었다. 그러므로 수직 응력과 수직 변형에 대한 효과를 고려하는 것이 신뢰성 있는 해석을 위해서 바람직한 것을 알 수 있다.