

변형된 동적이완법을 이용한 케이블-네트 구조물의 형상해석 Shape Finding of Cable-Net Structures by Using Modified Dynamic Relaxation Method

하 창 우¹⁾ 김 재 열²⁾ 권 택 진³⁾
Ha, Chang-Woo Kim, Jae-Yeol Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

Dynamic relaxation method is a shape finding analysis method for flexible structures by introducing the dynamic equilibrium equation. However, it is difficult for shape finding to estimate the most appropriate values for the mass and damping on each shape because the values are random one. In this study, the unit mass, the unit damping and the principal direction stiffness are utilized to avoid the random values, and the Newmarks assumption is introduced during the dynamic analysis. By introducing variant time increment method presented, the convergence time is reduced, that is, it can be reduced the total times for analysis.

1. 서 론

강성이 약한 재료로 구성되는 연성 구조물은 일반적인 구조물과는 달리 형상 해석이라는 특별한 해석 과정을 수행해야 한다. 즉, 설계 단계에 있어서 복잡한 3차원적 곡면 형상을 정확하게 결정하기 어렵고, 결정하더라도 곡면 형상이 역학적 초기 장력의 평형 조건을 만족한다고 할 수 없다. 이런 연성 구조물 특유의 초기 해석을 형상 해석이라 한다. 지금까지 형상 해석에 관해서 다양한 방법들이 제안되었으며, 대표적인 예로는 유한요소법(Finite element method), 내력밀도법(Force density method), 그리고 동적이완법(Dynamic relaxation method) 등이 있다.

Scheck¹⁾가 제안한 하중밀도법은 구조물의 각 절점에서의 내력과 외력에 의한 평형방정식만을 사용하여 해석하는 방법이다. 여기에 하중을 길이로 나누는 하중밀도의 개념을 도입하여 비선형방정식을 선형방정식으로 변화하여 해석한다.²⁾³⁾

Haber⁴⁾가 제안한 유한요소법은 에너지법을 이용하여 구조물의 정적 평형방정식을 유도하고 적절한 형상함수를 이용하여 구조물을 해석하는 방법이다. 연성 구조물은 압축과 휨에 대한 강성이 매우 작아 대변형 거동을 하기 때문에 이것을 고려한 기하학적 비선형 해석이 필요하다. 그러므로 평형방정식에서는 구조물의 재료적 조건에 의존하는 탄성강성과 기하적 조건에 의존하는 기하강성이 사용된다. 일반적으로 형상해석을 수행할 경우 구조물의 탄성계수를 '영(0)' 값으로 하여 탄성강성을 제외하고 기하강성만을 고려하여

1) 정회원, 성균관대학교 건축공학과, 석사과정
2) 정회원, 성균관대학교 건,조,토공학부 연구교수, 공학박사
3) 정회원, 성균관대학교 건축공학과, 교수, 공학박사

해석한다.⁵⁾ 즉, 구조물의 재료적 조건과는 독립적으로 기하형상에만 의존하는 평형방정식이 된다. 이 경우에는 하중밀도법과 유사한 평형방정식이 된다.

Day⁶⁾가 제안한 동적이완법은 유한요소법과 유사하나 구조물의 동적감쇠와 점성감쇠를 고려한 동적 평형방정식을 해석하는 방법이다. 형상해석을 수행할 경우 유한요소법과 동일하게 탄성계수로 '영(0)'값을 사용해서 해석한다. 즉, 동적감쇠와 점성감쇠를 고려한 기하형상에 의존하는 동적 평형방정식이 된다.

Barnes⁷⁾가 발전시킨 동적이완법은 점성감쇠를 제거하고 동적감쇠만을 사용하여 해석방법이다.⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾ 구조물의 주방향 강성만을 사용하고 시간증분, 강성, 질량에 관한 제안식을 주어 집중 질량을 조합하여 질량, 강성 모두가 절점에 집중된 값이므로 동적평형방정식의 해석에서 고유치해석이 필요치 않고, 절점에 관한 독립된 방정식들로 분해하여 계산하기 때문에 해석시간의 대부분을 차지하는 역행렬 계산과정이 필요하지 않는다. 또한, 동적평형방정식에서 중앙차분법을 이용하여 가속도항과 속도항을 변위항으로 치환하여 계산하였다. 한상을¹¹⁾은 형상해석의 수렴속도를 향상시키기 위해서 Barnes의 제안식에 적절한 질량계수를 곱하여 사용하였다. 그러나 구조물의 형상에 따라 각각의 최적질량계수를 산정해야한다.

본 연구에서는 집중강성과 단위 값으로 고정시킨 집중감쇠, 집중질량을 사용하고 Newmark의 가정을 도입하여 동적평형방정식을 계산하였다. 질량과 감쇠를 고정시키고 형상해석을 하면 전체 해석시간이 커지는 문제점이 발생할 수도 있다. 그러므로 불평형력의 변화를 고려하여 해석과정에서 시간증분을 변화시켜 수렴성을 향상시켰다.

2. 동적이완법

2.1. 기존의 동적이완법

동적이완법을 이용하여 구조물의 형상해석을 수행하는 경우 가상의 질량과 감쇠를 사용하므로 적절한 값을 산정하는 것이 중요하다. Barnes는 미지계수의 수를 줄이기 위하여 점성감쇠항을 제거하고 동적감쇠항만을 사용하여 구조물이 조화자유진동을 하게 하였다. 구조물이 운동하는 동안 운동에너지가 최대인 지점에서 구조물의 운동을 재설정하여 정적불평형에너지가 수렴조건에 근사할 때까지 해석을 수행한다.

동적해석의 안정성을 위해 제안된 식을 이용하여 가상의 질량을 산정하기 위해 도입하였다.

$$M_{xi} = M_{yi} = M_{zi} = \frac{\Delta t^2}{2} S_{i \max} \quad (1)$$

식(1)에서 각 절점의 질량은 3방향 강성 중 가장 큰 값을 선택하여 사용하였다. 제안식만을 가지고 형상해석을 수행할 경우 기하강성만을 사용하기 때문에 질량이 다른 계수 값에 비해 아주 작은 값이 된다. 그러면, 구조물의 거동이 매우 작아서 불평형력이 거의 발생하지 않아 평형상태의 형상을 찾지 못하거나 찾게 되더라도 많은 반복 계산이 필요하게 된다. 그러므로, 형상해석에서는 위의 제안식에 적절한 질량계수(λ)를 곱하여 가상의 질량 값을 다시 산정하여 사용한다.

$$M_{xi} = M_{yi} = M_{zi} = \lambda \frac{\Delta t^2}{2} S_{i \max} \quad (2)$$

2.2. 예제 해석

Catenary곡선을 가지는 구조물을 기존의 동적이완법으로 해석한 결과를 살펴보면 다음과 같다. Catenary곡선은 수학적으로 쌍곡선 식에 의해 정해를 구할 수는 형상이다. 그림 1.은 Catenary곡선 구조물의 입면형상과 수학적 정해를 나타낸 그림이다.

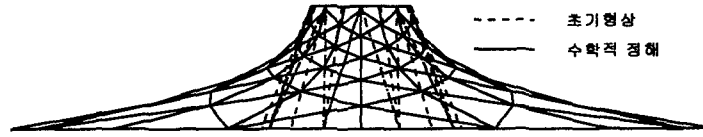


그림 1. Catenary 구조물

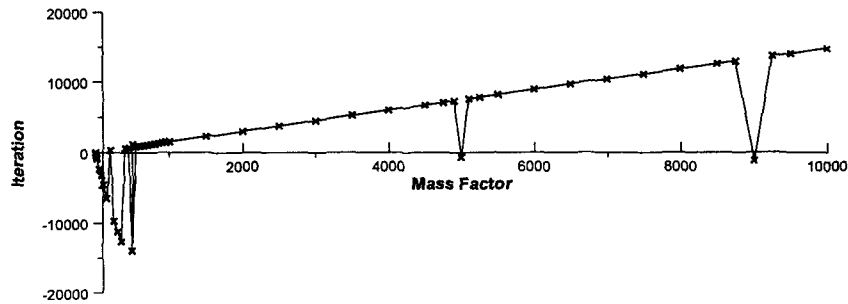


그림 2. Mass Factor에 따른 수렴상황

그림 2.은 Mass Factor의 값과 해석반복수의 관계를 나타낸 것이다. 시간증분(Δt)은 '0.0001'로 고정시키고 Mass Factor만을 변화하여 해석을 하였다. 해석결과 수치적으로는 수렴을 하였으나 결과 형상이 정해와 전혀 다른 경우에는 반복회수를 '음수(-)'로 표현을 하였다. Mass Factor가 증가함에 따라 해석반복수가 선형관계를 유지하며 증가하였으며, Mass Factor가 '100'이하의 값과 '5000'과 '9000'의 값을 가지는 경우 발산하였다. 즉, Mass Factor를 큰 값으로 하여 해석을 하면 해석반복수가 많아지므로 전체해석시간이 오래 걸리고, 작은 값으로 하면 발산을 할 가능성이 크다. 또한, Mass Factor가 큰 값을 가지더라도 발산하는 경우도 있다.

그림 3.은 Catenary 곡선 구조물의 입면 중에서 한 쪽만을 표현한 그림이다. 발산할 경우의 Mass Factor 값인 '600'을 선택하고 시간증분 값으로 '0.0001'을 사용하여 해석했을 경우 구조물이 거동을 나타낸다.

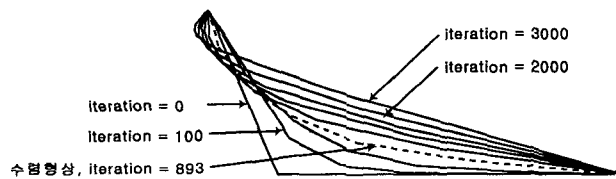


그림 3. 발산할 경우 구조물의 운동과정

초기형상으로부터 반복횟수가 증가함에 따라 점점 Catenary곡선의 정해와 유사한 곡선 형상으로 되었다가 점차적으로 직선 형상으로 바뀌어간다. 정해와 유사한 형상이 되었을 때의 반복회수가 '893'회이다.

만약 해석이 수렴하는 Mass Factor를 사용하는 경우에도 수렴형상을 찾을 수 있는 시간증분을 사용하지 못하면 위의 경우와 마찬가지로 수렴형상을 찾지 못하고 발산하게 된다.

기존의 동적이완법으로 해석을 수행할 경우 반복작업을 통하여 적절한 Mass Factor를 찾아야 하고 수렴과 전체 해석시간의 관계를 파악하여 적절한 시간증분을 산정해야 하는 어려움이 있다.

2.3. 수정된 동적이완법의 정식화

전포텐셜에너지가 평형이 되는 시간($t + \Delta t$)에서 가상일의 원리를 이용하여 동적평형방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_j d^{t+\Delta t} V + \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \dot{u}_j \delta u_j d^{t+\Delta t} V + \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau \delta_{t+\Delta t} e_{ij} d^{t+\Delta t} V = {}^{t+\Delta t} P \quad (3)$$

동적평형방정식에서 정적에너지항을 하중항으로 이항하여, 기준상태(t)에서의 정적불평형에너지에 의해 다음상태($t + \Delta t$)의 동적평형 형상을 찾을 수 있는 방정식으로 변형시키면 다음과 같다.

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_j d^{t+\Delta t} V + \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \dot{u}_j \delta u_j d^{t+\Delta t} V = {}^{t+\Delta t} P - \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau \delta_{t+\Delta t} e_{ij} d^{t+\Delta t} V \quad (4)$$

정적에너지항을 Second Piola-Kirchhoff Stress Tensor(S_{ij})와 Green-Lagrangian Strain Tensor(e_{ij}, η_{ij})를 이용하여 Total Lagrangian Formulation에 의해 나타내면 다음과 같다

$$\int_{t V} {}^t \tau \delta_t e_{ij} d^t V = \int_{0 V} {}^t_0 S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0 V + \int_{0 V} {}^t_0 S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0 V \quad (5)$$

케이بل-트러스 요소를 사용하여 유한요소법으로 정식화하면 다음과 같다.

$$m \ddot{u}^{t+\Delta t} + c \dot{u}^{t+\Delta t} = P^{t+\Delta t} - (k_e^t + k_g^t) u^t \quad (6)$$

질량과 감쇠, 시간증분 값의 변화에 따라 해석결과가 민감하게 반응하므로 적절한 값을 선택하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 질량과 감쇠를 단위 값으로 고정시켰다.

식(6)의 질량과 감쇠에 단위 값을 적용하면 다음과 같다.

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} + \dot{u}^{t+\Delta t} = P^{t+\Delta t} - (k_e^t + k_g^t) u^t \quad (7)$$

식(7)에서 초기변위이동에 의한 형상해석을 하는 경우 하중($P^{t+\Delta t}$)과 재료강성(k_e^t)을 모두 '0' 값으로 사용하면 다음과 같다.

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} + \dot{u}^{t+\Delta t} = -k_g^t u^t \quad (8)$$

위의 동적평형방정식의 가속도, 속도 그리고 변위 항에 Newmark의 가정을 도입하여 변위, 속도 그리고 가속도에 관한 증분 방정식을 만들면 식(9), 식(10), 식(11)과 같다.

$$\Delta u^t = \frac{\Delta \hat{P}^t}{\hat{k}} \quad (9)$$

$$\Delta \dot{u}^t = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u^t - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}^t + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{u}^t \quad (10)$$

$$\Delta \ddot{u}^t = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta u^t - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}^t - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}^t \quad (11)$$

식(9)에서 effective stiffness(\hat{k})와 effective incremental force($\Delta \hat{P}^t$)는 다음과 같다.

$$\hat{k} = \frac{\gamma \Delta t + 1}{\beta \Delta t^2} \quad (12)$$

$$\Delta \hat{P}^t = -(k_g^t u^t - k_g^{t-\Delta t} u^{t-\Delta t}) + a \dot{u}^t + b \ddot{u}^t \quad (13)$$

여기에서,

$$a = \frac{\gamma \Delta t + 1}{\beta \Delta t^2}, \quad b = \frac{(1 - 2\beta) \Delta t + 1}{2\beta} \quad (14)$$

전절의 예제와 동일하게 Catenary곡선 구조물을 본 연구에서 제안한 식으로 해석을 수행한 결과는 다음과 같다.

그림 4는 질량과 감쇠를 단위 값으로 사용하고 '0.01', '0.001'과 '0.0001'로 해석을 했을 때의 불평형력의 변화과정을 겹쳐서 나타낸 그래프이다. 단, 시간증분은 전체해석과정에서 고정시켜 해석했다. 각각 다른 시간증분으로 해석을 하였지만 전체해석시간은 모두 약420초로 동일하였고, 불평형력은 아주 유사하게 변화였다. 수렴과 발산의 경계점이 되는 시간증분이 약 '0.01'초 정도이고, 시간증분과 전체 해석반복수는 선형의 관계였다.

그림 5는 발산할 경우의 시간증분인 '0.1'초로 하여 해석했을 때 불평형력의 변화과정을 나타낸 것이다. 불평형력은 초기해석구간에서 수렴하는 경우와 유사하게 변화하지만, 수렴형상을 찾지 못하는 경우에는 분기점을 지나 점점 커지면서 발산하게 된다.

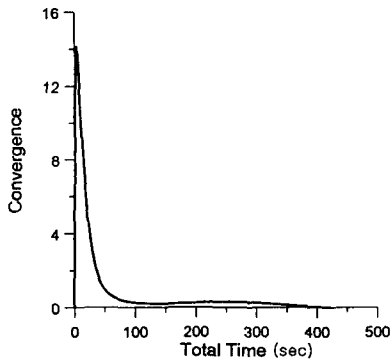


그림 4. 수렴하는 경우 불평형력 변화

표 1. 시간증분과 Iteration의 관계

| 시간증분 | Iteration |
|--------|-------------|
| 0.0001 | 4175710, 수렴 |
| 0.001 | 423219, 수렴 |
| 0.01 | 42380, 수렴 |
| 0.01이상 | 발산 |

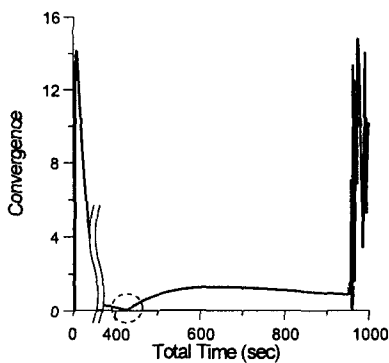


그림 5. 발산하는 경우 불평형력 변화

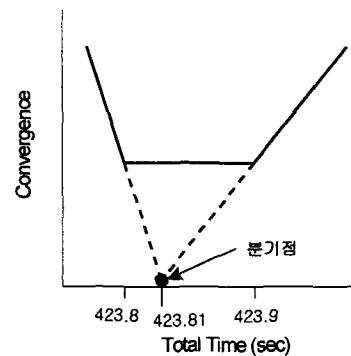


그림 6. 분기점에서 불평형력 변화

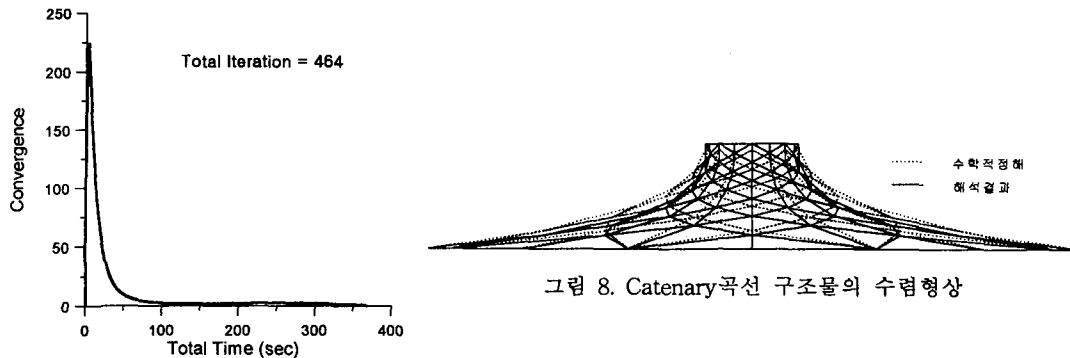


그림 7. 시간증분변화에 의한 수렴과정

그림 6.은 분기점 부근을 확대한 그래프이다. 만약 질량과 감쇠를 '1'값으로 고정시키고 시간증분을 '0.01'초로 하여 해석하면 '423.81'초에 수렴했다. 그러나, 시간증분을 '0.1'초로 할 경우 '423.81'초의 분기점을 찾지 못하고 '423.8'초에서 바로 '423.9'초로 넘어가서 그림 3.과 같이 발산하는 형상으로 변화하게 된다. 즉, 시간증분의 간격이 정확하게 분기점을 지날 수 있는 값으로 해석을 수행해야 수렴형상을 찾을 수 있다. 시간증분이 크면 수렴형상을 찾지 못 하는 경우도 발생하고, 시간증분이 작으면 발산하거나 수렴해도 전체 해석시간이 오래 걸리는 경우가 있다. 해석하는 형상에 따라 불평형력의 변화 형태는 다르지만, 시간증분에는 관계없이 거의 유사하게 변화했다.

본 연구에서는 불평형력의 변화율을 고려하여 변화율이 클 경우에는 시간증분을 크게 하여 해석 반복수를 줄이고, 수렴 값에 가까이 근접했을 경우는 시간증분 값을 작게 하여 분기점을 찾는 방법을 사용하였다.

그림 7.은 해석과정 중 불평형력의 값을 판단하여 시간증분을 변화시켰을 경우의 수렴과정을 나타낸 것이다. 그림 4.와 비교해 보면 구조물의 불평형력 변화와 전체해석시간이 해석과정 중 시간증분의 변화 없이 해석을 하는 경우와 유사하였다. 그러나 해석반복수는 시간증분의 변화가 없는 경우보다 상당히 줄어 들었고, 기존의 동적이완법으로 최적의 질량계수를 선택하여 해석했을 경우와 비슷한 해석반복수로 수렴함을 알 수가 있다.

그림 8.은 본 연구에서 제안한 방법인 Newmark의 가정, 단위 값의 질량과 감쇠, 시간증분의 변화를 도입하여 형상해석을 수행한 결과를 나타냈다. 그림에서 점선이 수학적 정해이고 실선이 해석결과 이다. 해석결과 수학적 정해와 유사한 형상을 찾을 수 있다.

3. 예제 구조물 해석

3.1. HP 형상 구조물

본 연구에서 제안한 방법을 HP 형상의 구조물에 적용시켜 보았다. 사각형의 초기형상에서 네 개 모서리의 끝에 있는 절점을 고정시키고, 대각선으로 마주보고 있는 절점의 두 쌍 중 하나는 위로 다른 하나는 아래로 초기변위이동 시킨 후 형상해석을 수행한 결과이다.

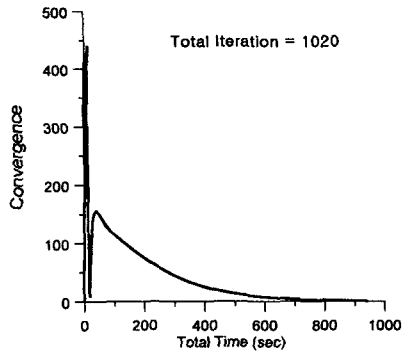


그림 9. HP형상 구조물의 불평형력 변화

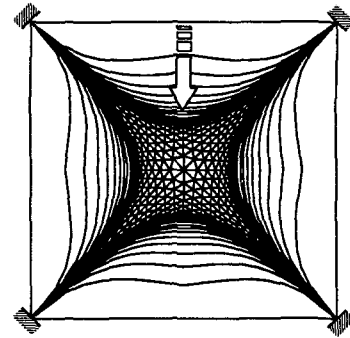


그림 10. HP형상 구조물의 수렴과정

그림 9. 에서 구조물의 불평형력의 변화는 초기에는 대부분 질량에 지배되어 급격한 변화를 보이지만 후에 점성감쇠에 의해 점차적으로 감소되어 수렴함을 알 수 있다. 그림 10.은 HP 형상 구조물이 수렴할 때까지의 과정을 평면에서 나타낸 것이다. 초기에 사각형의 네 변을 이루는 직선이 점차 화살표의 방향으로 진행하면서 곡선으로 변화하였다.

3.2. 두개의 쌍곡선 형태 구조물

다음은 두 개의 Cone Shape을 갖는 구조물에 적용 시켜 보았다. 두 개의 원 중심 절점과 외부 절점을 고정시키고 중심의 절점들을 초기변위이동 시킨 후 형상해석을 수행한 결과이다.

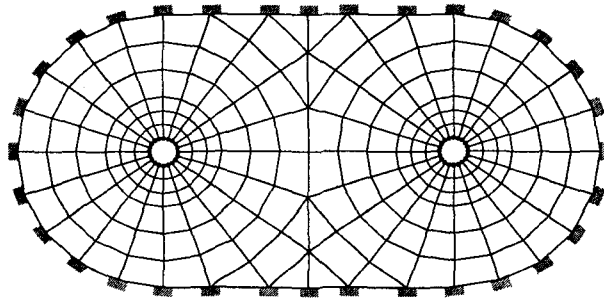


그림 11. 초기형상 (평면)

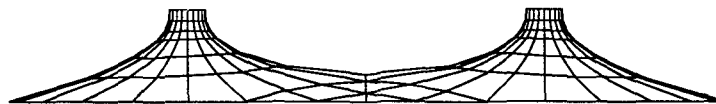


그림 12. 형상해석 결과 (입면)

4. 결 론

기존의 동적이완법을 이용하여 형상해석을 하는 경우 수렴형상을 찾기 위하여 형상에 따른 가상의 질량과 시간증분을 설정해 주어야 하는데, 이를 위해서는 해석하는 사람의 경험과 여러 번의

반복작업등이 필요하므로 불편함이 있었다.

본 연구에서는 가상의 질량과 감쇠를 단위 값으로 고정하여 변수의 수를 줄였고 동적평형방정식을 Newmark의 가정을 도입하여 해석하였다.

시간증분을 전 해석과정에서 고정하여 해석한 결과 시간증분에 따라 수렴하거나 발산하였고, 수렴하는 경우에도 시간증분에 따라 해석반복수가 크게 달랐다. 그러나 불평형력은 시간증분 크기에 관계없이 거의 동일하게 변화되었다. 해석 과정에서 불평형력의 변화를 판단하여 시간증분 값을 변화시켜 해석한 결과와 기존의 동적이완법의 결과와 비교하였을 경우 유사한 형상이 나왔고 해석반복회수는 더 좋아졌다. 그러므로 본 연구에서 제안한 동적이완법은 구조물의 형상에 따라 질량과 감쇠를 조절하지 않고 해석과정에서 불평형력을 고려한 시간증분의 변화를 사용하여 구조물의 수렴형상을 찾는 형상해석방법이다.

추후 연구과제로는 불평형력의 변화와 시간증분의 관계를 좀 더 정확히 판단하여 시간증분의 최대, 최소 경계 값을 산출하여 적용시켜야 하고, 여러 형태를 지닌 구조물의 형상해석을 수행하여 적용성을 높여야 할 것이다.

5. 참고문헌

1. H.J. Schek, "The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Networks," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, 1994, pp. 115-134.
2. 이장복, 권택진, 하창우, "제한조건을 갖는 케이블-네트 구조물의 형상결정에 관한 연구," 한국전산구조공학회 추계학술발표회 논문집, 1999, pp.325-332.
3. 김재열, 이장복, 권택진, "일반역행렬을 이용한 케이블네트 구조물의 형상결정에 관한 연구," 대한건축학회 논문집, 제16권, 6호, 2000년 6월.
4. R.B. Harber, "Computer-Aided Design of Cable Reinforced Membrane Structure," Thesis Presented to Cornell University, Ithaca, N.Y., 1980.
5. 서삼열, "막구조물의 반복적 최적 형상탐색해석에 관한 연구," 성균관대학교 대학원 박사논문, 1991.
6. A.S. Day, "An Introduction to Dynamic Relaxation," The Engineer, London, Vol. 219, 1965, pp.18-221.
7. M.R. Barnes, "Form-Finding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes," Computers & Structures, Vol. 30, 1988, pp.685-695.
8. W.J. Lewis, P.D. Gosling, "Stable Minimal Surface in Form-Finding of Lightweight Tension Structures," International Journal of Space Structures, Vol. 8, No. 3, 1993, pp.149-166.
9. W. J. Lewis, M. S. Jones, K. R. Rushton, Dynamic Relaxation Analysis of The Non-Linear Static Response of Pretensioned Cable Roofs, Computers & Structures Vol. 18, No. 6, 1984, pp. 989-997.
10. Klaus Linkwitz, "About For Finding of Double-Curved Structure," Engineering Structure, 1999, pp.709-718.
11. 한상을, 이경수, 이상진, "동적이완법에 의한 불안정 구조물의 안정화 이행과정 해석에 관한 연구," 한국강구조학회 논문집, 제11권, 6호, 1999년 12월, pp. 591-602.