

# Fractionally Spaced 등화기를 위한 Modified CMA

김한경\*, 백흥기\*\*

\*전북대학교 대학원 전자공학과

\*\*전북대학교 공과대학 전자정보공학부

## Modified CMA for Fractionally Spaced Linear Equalizer

H. K. Kim\* and H. K. Baik\*\*

\*Dept. of Electronic Engineering, Chonbuk Nat'l Univ.

\*\*Division of Electronic & Information Engineering, Chonbuk Nat'l Univ.

E-mail : hkbaik@moak.chonbuk.ac.kr

### 요 약

본 논문에서는 MCMA(modified constant modulus algorithm) 블라인드 등화 알고리즘을 고속 데이터 통신에 적합한 FSE(fractionally spaced equalizer)에 적용시킨 FS-MCMA를 제안하였다. 제안한 FS-MCMA는 위상 복원문제와 같은 CMA의 단점을 보완하기 위하여  $M$ -ary QAM 신호의 경우 다중레벨로 등화하는 기존의 MCMA 이용하였고 주기  $T$ 의 간격으로 수신되는 심볼을 2배 이상으로 샘플링하는 기법, 즉 FSE를 도입하여 높은 데이터율을 요구하는 멀티미디어 통신에 적합하도록 구성하였다.

컴퓨터 모의 실험을 시행한 결과를 residual ISI 측면에서 기준을 정하고 비교하였는데 4dB 정도의 성능향상을 보였으며, 또한 기존의 CMA보다 15dB 정도의 성능향상을 보였다.

### 1. 서 론

고속의 데이터는 채널을 통해 전달될 때 채널의 비이상적인 특성 때문에 심볼간의 간섭을 피할 수 없게 된다 [1]. 이와 같은 심볼간의 간섭은 신호를 복원하는데 있어 간과할 수 없는 문제이며 이를 해결하기 위한 등화기가 필수적으로 요구된다. 등화기는 적용되는 시스템에 따라 여러 가지 구조를 가지고 있는데 근래에 들어서 다중레벨을 적용한 등화기법의 대한 연구가 이루어지고 있다 [2]. 이와 같은 블라인드 등화기법은 점대 다점(point to

multi-point) 방식의 통신에 많이 쓰인다.

블라인드 등화기는 Bussgang에 의해 제안된 블라인드 개념을 바탕으로 1980년경에 Sato와 Godard에 의해 처음으로 제안되었다[1][5]. 대부분의 적응 등화 알고리즘은 비용 함수를 변형시키는 방법을 이용하고 있다. Sato와 Godard에 의해 제안된 블라인드 등화기에는 기존의 자승평균 오차 함수를 사용하였다. 그러나 Sato 알고리즘의 경우, 최소 평균 자승 오차를 위한 탭 계수 설정이 제대로 되어 있지 않는 문제가 있고, Godard 알고리즘의 경우 비용 함수의 평균 자승 오차에 국부 최소점이 존재하는 문제점이 발생한다. Godard 알고리즘의 이러한 문제점을 해결하기 위해 여러 가지 수정된 CMA(modified constant modulus algorithm)가 제안되었다 [2].

멀티미디어가 발전함에 따라 좀 더 높은 데이터율을 요구하게 되는데 이 때 샘플링을 할 때 샘플링 시간 오차와 위상 오차가 발생할 수 있다[3][4]. 이 오차를 줄이기 위한 방법으로  $T$  간격으로 수신되는 심볼을 Nyquist의 이론을 바탕으로 최대주파수보다 2배 이상 빠르게 샘플링할 경우 본래의 신호를 복원할 수 있다는 점을 적용하여 이미 1970대에 이러한 이론을 바탕으로 FSE가 등장했다[4].  $T/N$  간격으로 샘플링을 하게 되면 수신부의 아날로그 정합필터를 디지털 필터로 대체할 수 있다는 장점이 있다. 이는 정합 필터가 디지털 필터로 되면서 변화하는 채널에 적응하기가 훨씬 용이하게 할 수 있기 때문이다. 또한 샘플링 시간 오차와 위상 오차에 덜 민감하며 기존의 선형 등화기의 치명적인 단점인 잡음 증폭에 대한 영향을 현저하게 줄일 수 있는 장점도 있다

[3][4]. 그 후에 블라인드 알고리즘 CMA를 oversampling 하는 개념을 도입하여 잡음에 대한 영향과 국부 최소점을 해결한 결과에 이르렀다[7].

본 논문에서는 MCMA가 블라인드 등화 알고리즘으로 갖는 장점을 심볼의 주기  $T$  보다 2배 이상 샘플링을 시행하여 갖는 FSE의 장점과 함께 적용함으로써 MCMA를 고속의 데이터를 요구하는 멀티미디어 통신에 적합하게 적용한 FS-MCMA를 제안하고 제안한 알고리즘의 성능 평가를 위한 컴퓨터 모의 실험을 시행하여 기존의 알고리즘보다 성능이 향상됨을 보였다.

$T/N$ 에서  $N$ 은 주기를 나눈 정수이며 본 논문에서는  $N=4$ 에 한하여 적용하였다.

## 2. MCMA (Modified Constant Modulus Algorithm)

기존의 CMA에서 발생하는 반송파 위상 복원 문제를 해결하기 위해 이용한 MCMA는 single/multilevel modulus 알고리즘[2]으로 실수 부분과 허수 부분으로 나누어 2차원의 성상도를 이용한다. 여기에 적용된 비용함수는 아래와 같다.

$$J(n) = J_I(n) + J_Q(n) \quad (1)$$

$$J_I(n) = E[(y_I^2(n) - R_{2I})^2] \quad (2)$$

$$J_Q(n) = E[(y_Q^2(n) - R_{2Q})^2] \quad (3)$$

여기에서  $y_I(n)$ 과  $y_Q(n)$ 는 각각 등화기 출력값의 실수 부분과 허수부분을 나타낸 것이다. 등화기의 출력 신호는  $y(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{f}(n)$ 이며  $R_{2I}$ 와  $R_{2Q}$ 는 전송된 데이터 심볼  $x(n)$ 의 실수 부분과 허수 부분의 앙상블 평균값으로 이루어진 상수이다.

$$R_{2I} = \frac{E[x_I^4(n)]}{E[x_I^2(n)]}, \quad R_{2Q} = \frac{E[x_Q^4(n)]}{E[x_Q^2(n)]} \quad (4)$$

등화기의 탭 가중치의 갱신식은 LMS 알고리즘을 이용하여 아래와 같이 나타낸다.

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) - 4\mu e^*(n) \mathbf{x}(n) \quad (5)$$

오차 신호 또한 실수와 허수 부분으로 나누어 계산된다.

$$e(n) = e_I(n) + e_Q(n) \quad (6)$$

$$e_I(n) = y_I(n)[y_I^2(n) - R_{2I}] \quad (7)$$

$$e_Q(n) = y_Q(n)[y_Q^2(n) - R_{2Q}] \quad (8)$$

위의 방법으로 반송파 위상 복원 문제를 해결할 수 있다. 여기에 덧붙여 다수준의 하나의 반지름을 적용시

켰을 때 발생하는 문제를 해결하고, 하나의 반지름을 사용했을 때보다 등화 성능을 향상시킬 수 있도록 등화기의 출력에 따른 여러 개의 반지름을 사용하였다. 그 때의 오차 신호는 다음과 같다.

$$e_I(n) = y_I(n)[y_I^2(n) - R_{2I,i}] \quad (9)$$

$$e_Q(n) = y_Q(n)[y_Q^2(n) - R_{2Q,i}] \quad (10)$$

여기에서 상수  $R_{2I,i}$ 와  $R_{2Q,i}$ 은 아래와 같이 나타내며  $i$ 는 가장 오차가 적은 상수의 레벨의 순서를 나타낸다.

$$R_{2I,i} = |\hat{x}_I(n)|^2, \quad R_{2Q,i} = |\hat{x}_Q(n)|^2 \quad (11)$$

$\hat{x}_I(n)$ 과  $\hat{x}_Q(n)$ 는  $y_I(n)$ ,  $y_Q(n)$ 에 대해 가장 가까운 성상점의 심볼을 나타낸다. 각 성상점을 중심으로 구간을 정한 다음 그 구간에 속하는 출력과 비교하여 가장 가까운 성상점을 상수로 정해주는 방식을 사용하였다.

## 3. Fractionally Spaced 채널 모델링

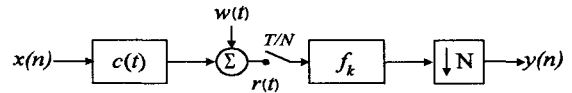


그림 1. Fractionally spaced 수신기의 채널 모델링

원천 채널에 대한 모델은 그림 1에 나타내었다. 심볼  $x(n)$ 은 펄스 정형 필터를 통과해 채널을 지나게 된다. 이렇게 송신기를 통해 나온 심볼은 채널을 거쳐 수신기를 지나게 되는데 이를 하나의 LTI(linear time invariant) 시스템이라고 가정하고 연속 시간 임펄스 응답  $c(t)$ 라 한다.  $c(t)$ 를 지나 여기에 부가 잡음  $w(t)$ 가 더해져 최종적인 수신된 신호가 되는데 이 또한 연속 시간 신호이다. 이 신호를 Nyquist의 기준에 의해  $T/N$  ( $N=2$ 이상)로 샘플링을 하게 되면 정합 필터를 등화기 내에 포함시킬 수 있으며 디지털 필터로 구성할 수 있게 된다[4].

그림 1의 모델링은 다음과 같은 그림 2의 등가 multirate와 그림 3의 다채널 모델로 나타낼 수 있다. 이 두 모델도 등가임을 증명할 수 있다. 이 등가인 두 모델을 채널과 등화기의 계수로 식(12), 식(13)과 같이 각각 표현할 수 있다.

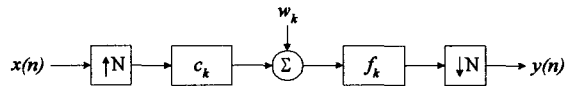


그림 2. Multirate 시스템 모델

$T/2$ 간격 채널의 임펄스 응답과 등화기 계수를 각각  $\mathbf{c} = [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{2M-1}]^T$  그리고  $\mathbf{f} = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{N-1}]^T$  라고 정의하면  $\mathbf{C}_{FS} \mathbf{f}$ 는 식(12)와 같다.

$$\mathbf{C}_{FS} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} c_0 & & & & & & \\ c_1 & c_0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ c_{2M-1} & c_1 & \vdots & & c_0 & & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & c_{2M-1} & \vdots & c_1 & & \\ & & & \vdots & c_2 & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & c_{2M-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

이때 전체 임펄스 응답  $\mathbf{h}_{FS} = [h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{p-1}]^T$ 가 된다.

그리고 그림 2의 multirate 시스템 모델을 채널 임펄스 응답과 등화기 계수 응답으로 표현하면 식(13)과 같다.

$$\mathbf{C} \downarrow \mathbf{f} = \begin{bmatrix} c_0 & & & & & & \\ c_2 & c_1 & c_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ c_{2M-2} & c_3 & c_2 & & & & \\ & c_{2M-1} & c_{2M-2} & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & & \vdots & c_1 & c_0 & \\ & & & & c_3 & c_2 & \\ & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & c_{2M-1} & c_{2M-2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

이때 전체 임펄스 응답  $\mathbf{h} = [h_0 \ h_2 \ h_4 \ \dots \ h_{P-1}]^T$ 가 된다.

또한, 그림 3의 다채널 모델의 경우 등화기 계수를 다른 형태인  $\mathbf{f} = [f_0 \ f_2 \ \dots \ f_1 \ f_3 \ \dots]^T$ 로 표현될 경우  $\mathbf{C} \downarrow$ 는  $(=[\mathbf{C}_e \ | \ \mathbf{C}_o])$ 인 block Toeplitz가 된다.

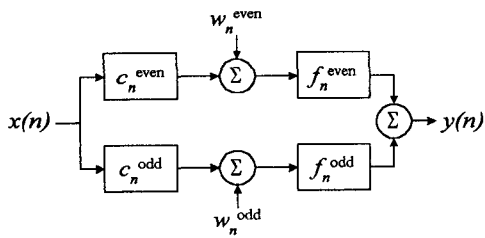


그림 3. 다채널 시스템 모델

#### 4. 모의 실험 및 결과

MCMA의 성과와 제한한 FS-MCMA의 성과를 컴퓨터 모의 실험을 통해 비교하기 위해 다음과 같이 가정하

였다.

source 신호는 iid(identically independent distribution)이며 동기는 정확히 이루어졌다고 가정하였으며 변조 신호는 16-QAM을 사용하였으며 SNR과  $\mu$ 값을 여러 가지로 변화시키며 실험하였다. 사용한 step-size는 0.00001, 0.000003이며 SNR은 10, 30dB이다.

모의 실험에서 사용된 채널은 그림 4와 같다.

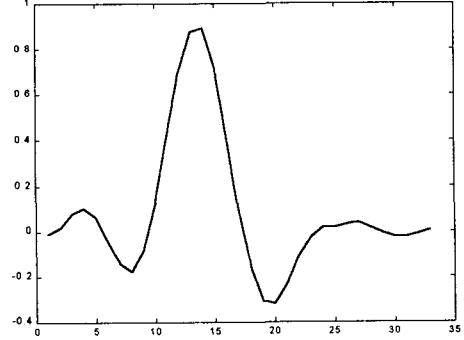


그림 4. 채널의 임펄스 응답

이 채널은 3차 멀티탭 모델로 상승 코사인 펄스이다. 채널의 임펄스 응답은 아래식과 같이 정의된다.

$$h(t) = c(t, 0.11)W(t) + 0.8c(t - 0.25T, 0.11) \times W(t - 0.25T) - 0.4c(t - 2T, 0.11)W(t - 2T) \quad (14)$$

이 때  $c(t, 0.11)$ 는 roll-off factor가 0.11인 상승 코사인 펄스이며  $W(t)$ 는 구간  $[-3T, 3T]$ 를 갖는 rectangular truncation window이다.

신호 입력시 적용된 SNR식은 식(15)와 같다.

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E[x(n) * h(n)]^2}{\sigma_v^2} \quad (15)$$

식(15)에서  $x(n)$ 은 전송된 데이터 심볼이며  $\sigma_v^2$ 은 AWGN의 분산을 나타낸다.

성능기준은 식(16)로 표현되는 ISI를 기준으로 하였다.

$$ISI(n) = \frac{\sum_{\pi} |s(n)|^2 - |s(n)|_{\max}^2}{|s(n)|_{\max}^2} \quad (16)$$

여기에서  $ISI(n)$ 은 시간  $n$ 에서 출력의 residual ISI값을 나타내며,  $s(n)$ 은 전달된 채널과 등화기의 임펄스 응답의 컨볼루션으로 이루어지며 (17)식으로 표현된다.

$$s(n) = h(n) * f(n) \quad (17)$$

식(16)에서  $|s(n)|_{\max}$ 는 절대값  $\{s(n)\}$ 의 성분중 가장 큰 값을 나타낸다. 등화가 잘 될수록  $ISI(n)$ 은 0에 가

가워지게 된다.

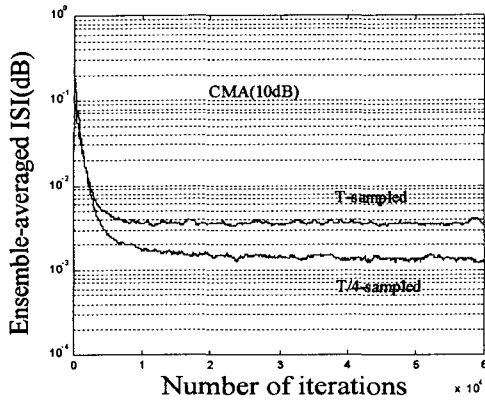


그림 5. SNR=10dB일 때의 CMA와 FS-CMA

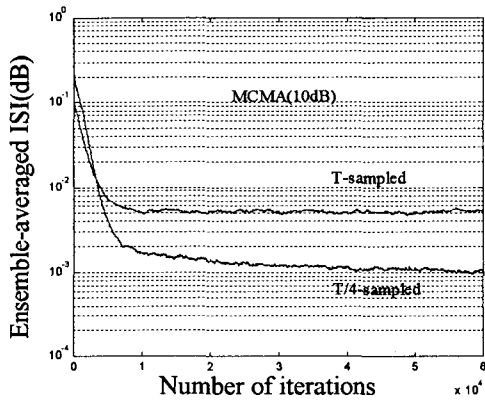


그림 6. SNR=10dB일 때의 MCMA와 FS-MCMA

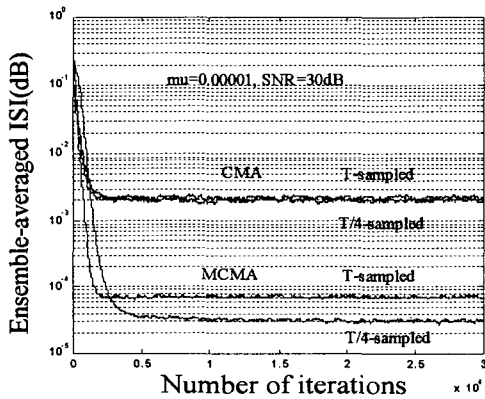


그림 7. SNR=30dB에서의 CMA와 MCMA

그림 5 - 그림 7은 모의 실험의 결과를 나타낸 것이다. 그림 5와 그림 6은  $\mu=0.000003$ , SNR=10dB에서

CMA군(CMA, FS-CMA)과 MCMA군(MCMA, FS-MCMA)을 각각 독립적으로 50번을 시행한 결과이다. 결과적으로 3dB~4dB정도 residual ISI가 감소했음을 보여주고 있다. 하지만 기존의 CMA군, MCMA군과는 크게 성능 차이를 나타나지 않았다.

하지만 그림 7에서 볼 수 있듯이 30dB에서는 기존의 CMA군에서는 차이를 보이지 않았으며 MCMA군에서는 FS-MCMA가 MCMA보다 우수한 성능을 보였다.

## 5. 결론

본 논문에서는 MCMA를 고속의 데이터 통신에 적합하도록 FSE를 적용한 FS-MCMA를 제안하였다.

FS-MCMA와 MCMA를 컴퓨터 모의 실험을 시행한 결과를 통해 SNR이 낮은 경우에 CMA와 MCMA에서 비슷한 결과를 나타내었고 높은 SNR을 적용하였을 때는 FS-MCMA가 MCMA보다 4dB정도의 성능향상을 볼 수 있음을 확인할 수 있다. 또한 FS-MCMA와 CMA군을 비교해 볼 때 15dB정도 성능 향상을 보였다.

## 참고 문헌

- [1] J. G. Proakis, *Digital communications*. McGraw-Hill, 1995.
- [2] K. N. Oh, "A single/multilevel modulus algorithm for blind equalization of QAM signals," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E80, no. 6, Jun. 1997.
- [3] S. U. H. Qureshi, "Adaptive equalization," *Proc. of the IEEE*, vol. 73, no. 9, pp. 1349-1387, Sep. 1985.
- [4] J. R. Treichler, et al., "Fractionally spaced equalizers," *IEEE Signal Proc. Mag.* vol. 13. no. 3, pp. 65-81, May. 1996.
- [5] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. 3rd Ed., Englewood Cliffs, NJ: PH, 1997.
- [6] C. R. Johnson and P. Schniter, "Blind equalization using the constant modulus criterion: A review," *Proc. of the IEEE*, vol. 86, no. 10, pp. 1927-1949, Oct. 1998.
- [7] Y. Li and Z. Ding, "Global convergence of fractionally spaced godard (CMA) adaptive equalizer," *IEEE Signal Proc. Mag.* vol. 44. no. 4, pp. 818-826, Apr. 1996.