

백스테핑을 이용한 이동 로봇의 경로 제어기의 설계

이기철, 이성렬, 류신희, 고재원*, 박민용
 연세대학교 전기컴퓨터공학과
 * 유한대학 제어계측과
 전화 : (02)361-2868 / 팩스: (02)312-4584

Trajectory Controller Design of Mobile Robot Systems based on Back-stepping Procedure

Kichul Lee, Sungryul Lee, Shinhyung Ryu, Jaewon Kho, and Mignon Park
 email : kcllee@yeics.yonsei.ac.kr

Abstract

Generally, the wheel-driven mobile robot systems, by their structural property, have nonholonomic constraints. These constraints are not integrable and cannot be written as time derivatives of some functions with respect to the generalized coordinates. Hence, nonlinear approaches are required to solve the problems. In this paper, the trajectory controller of wheeled mobile robot systems is suggested to guarantee its convergence to reference trajectory. Design procedure of the suggested trajectory controller is back-stepping scheme which was introduced recently in nonlinear control theory. The performance of the proposed trajectory controller is verified via computer simulation. In the simulation, the trajectory controller is applied to differentially driven robot system and car-like mobile robot system on the assumption that the trajectory planner be given.

I. 서론

휠 구동형 이동 로봇은 그 기구학적 특성에 의해서 일반적으로 논홀로노믹 제약 조건을 갖는다. 이러한 시스템은 Brockett의 정리에 의하면 제어가능한 형태로 표현된다 할지라도 연속미분가능하고 시불변인 피드백 제어기로는 평형점의 안정성을 보장해 주지 못한다.[8] 홀로노믹 특성을 갖는 시스템은 고전 역학 분야에서 이미 150년 전부터 연구되어 왔지만 시스템의 제어 문제에 대한 연구가 다루어 진 것은 불과 최근의 일이다. 그 이유로는 논홀로노믹 시스템에서 발생하는 제약 조건이 일반화된 좌표계에서 시간에 대한 미분 함수로 나타나지 않고 단지 적분 불가능한 속도 사이의 관계로만 표현되기 때문이다. 따라서 이러한 비선형 시스템을 제어하기 위해서는 기본적으로 비선형 제어 방법론을 따라야 한다. 본 논문에서는 논홀로노믹 특성을 갖는 이동 로봇 시스템에 대해서 그 기구학적 특성을 분석하고 또한 시스템의 경로를 제어하기 위한 새로운 제어기를 제안하며 그 제어기의 설계는 비선형 제어이론에서 도입된 백스테핑 기법을 적용하여 이루어진다. 백스테핑 기법을 사용하여 제어기를 설계하는 방식은 안정성을 검증할 수 있는 Lyapunov 함수가 존재함을 항상 보장해 주며 기존의 피드백 선형화 기법에 의해서 제어기를 설계할 경우 발생하는 설계상의

어려움을 포함한 여러 가지 단점을 극복할 수 있는 도구를 제공해 준다. 본 논문에서 사용되는 제어기 설계 과정을 기술하면 먼저 이동 로봇 시스템의 기구학 모델을 좌표변환과 입력변환의 과정을 거쳐 체인형 논홀로노믹 시스템으로 표현한 후 백스테핑 기법에 의해서 경로의 수렴성을 보장해 주는 제어기를 설계한다. 설계된 경로 제어기는 그 설계 절차에 의해서 안정성이 보장되며 경로 계획기에서 생성되는 운동이 정지하지 않을 경우 Babalat's 보조정리를 통하여 점근적으로 안정함이 보장된다. 또한 경로 계획기가 주어졌다는 가정하에서 차량형 이동 로봇 시스템에 대해서 제안된 경로 제어기를 적용하여 모의실험을 수행하고 그 타당성을 검증한다.

II. 이동 로봇의 모델링

매니플레이터형 로봇의 기구학 모델은 로봇 핸드 좌표계와 각 관절에 주어지는 관절 좌표계사이의 상관관계에 의해서 주어지지만 휠 구동형 이동로봇의 경우 그 기구학 모델은 그림 1과 같이 전역 좌표계에서 이동 로봇의 위치와 방향을 결정하는 이동 로봇 좌표계의 운동과 이러한 운동을 유발하는 휠 사이의 상관관계에 의해서 주어진다.[7] 이동 로봇의 몸체에는 각 휠의 위치와 방향을 기술해 주는 로봇 기준 좌표계가 할당되며 이 좌표계는 전역 기준 좌표계에서 보았을 때 평면을 따라 움직이는 좌표계로 볼 수 있다. 따라서 전역 좌표계와 로봇 좌표계의 사이의 변환 $g: R^2 \rightarrow R^2$ 는 유클리디안 공간 R^2 상에서 변환군 $SE(2)$ 을 형성하

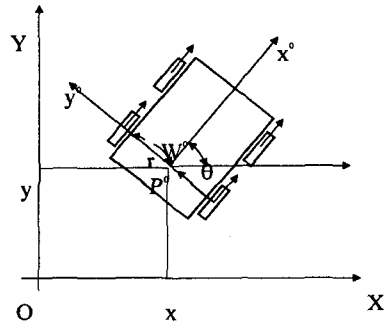


그림 1. 이동 로봇의 구성도

고 다음과 같은 3×3 행렬에 의해서 유일하게 결정되어 질 수 있다.

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

여기서 $R \in SO(2)$ 이고 $p \in R^2$ 이다. 변환군 $SE(2)$ 는 3차의 리군이 되므로 전역 좌표계의 기저벡터를 $\{a_x, a_y\}$, 로봇 좌표계의 기저벡터를 $\{a_{x0}, a_{y0}\}$ 라고 했을 때 전역좌표계에서 본 로봇의 자세는 전역좌표계에서 바라본 이동로봇 좌표계의 위치 x, y 와 그 회전 각 θ 에 의해서 식 1과 같이 기술될 수 있다.

$$\xi = [x, y, \theta]^T \quad (1)$$

전역좌표계에서 바라본 이동 로봇 좌표계의 순시운동은 ξ 로 표현되며 이 운동은 각 휠의 순수회전 운동에 의해서 발생한다. 이와 같이 이동 로봇에 부착된 개개의 휠이 미끄러짐 현상이 없이 순수 회전운동에 의해서 발생한다면 휠의 회전운동과 이동 로봇 좌표계의 순시 운동은 다음과 같은 제약을 갖게 된다.

$$C(\beta_s)R(\theta)\xi = 0 \quad (2)$$

여기서 β_s 는 조향휠의 순시 조향각을 나타내고 $C(\beta_s)$ 는 이동 로봇의 기준 좌표계와 부착된 휠사이의 기구학적 구성에 의해서 결정되며 $C(\beta_s)$ 를 구성하는 각각의 행벡터는 이동 로봇 좌표계에서 본 각각의 휠의 축방향과 동일하다. 또한 $R(\theta)$ 는 전역 좌표계에서의 운동을 이동 로봇 좌표계에서 표현해주는 변환 행렬이므로 다음과 같다.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

이동로봇의 운동이 식 (2)와 같은 제약조건을 가질 때 이동 로봇의 운동은 $C(\beta_s)$ 의 영공간상에서 주어지므로 그 순시 운동 모델은 식 (4)와 같이 $C(\beta_s)$ 의 행벡터 $\{w_1, \dots, w_k\}$ 를 소멸시키는 벡터필드 $\{g_1, \dots, g_m\}$ 의 분포내에 놓이게 된다.

$$R(\theta)\xi \in \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \quad (4)$$

따라서 전역좌표계에서 바라본 이동 로봇의 순시 운동 모델은 식 (5)와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \xi &= R^T(\theta)[\eta_1 g_1 + \dots + \eta_m g_m] \\ &= R^T(\theta)[g_1, \dots, g_m] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} \\ &\triangleq R^T(\theta)\Sigma(\beta_s)\eta \end{aligned} \quad (5)$$

이 결과를 이용하여 그림 2와 같이 조향휠이 없는 차륜구동형 이동 로봇의 경우 두 개의 고정휠에서 주어지는 제약방정식으로부터 다음과 같은 이동 로봇의 순시 운동학 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi &= R^T(\theta)[\eta_1 g_1 + \eta_2 g_2] = R^T(\theta)\Sigma(\beta_s)\eta \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)과 같이 전역 좌표계상에서 이동 로봇의 순시 운동을 기술하는 모델을 통상 기구학 모델이라고 한다. 그림 3과 같이 조향휠이 있는 차량형 이동 로봇의 경

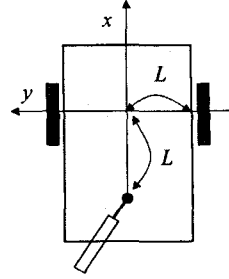


그림 2. 차륜구동형 이동 로봇의 구조

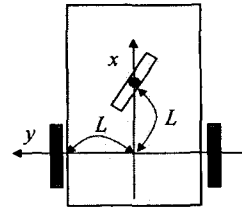


그림 3. 차량형 이동 로봇의 구조

우에 있어서 그 순시 운동학 모델을 구해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi &= R^T(\theta)\Sigma(\beta_s)\eta \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta_s) \\ 0 \\ \frac{1}{l} \sin(\beta_s) \end{bmatrix} \eta_1 \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\beta_s) \\ \sin(\theta) \cos(\beta_s) \\ \frac{1}{l} \sin(\beta_s) \end{bmatrix} \eta_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\beta_s = \eta_2 \quad (8)$$

식 (8)은 조향휠의 조향각에 대한 운동을 나타내며 조향운동에 대해서는 어떠한 제약도 받지 않게 된다. 따라서 식 (7)의 이동 로봇의 위치에 대한 운동 모델과 식 (8)에서 주어지는 조향휠의 운동을 결합하여 차량형 이동 로봇의 기구학 모델이라고 한다.

III. 휠구동형 이동 로봇의 경로제어기의 설계

III.1 이동 로봇의 체인형 변환

논홀로노믹 시스템은 입력 공간의 벡터 필드와 그 리 괄호 연산에 의해서 주어지는 상태공간의 부분 접공간 상에서 순시 운동을 유발한다. 특히 이동 로봇처럼 입력 공간에서 주어지는 분포의 특성이 미끄러짐 없는 접촉과 회전에 의해서 순시 운동이 발생한다면 다음과 같은 형태로 변환할 수 있다.[1]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} u_1 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)와 같이 표현되는 논홀로노믹 시스템을 체인형 논홀로노믹 시스템이라고 한다. 이러한 좌표변환에 대한 필요충분 조건은 의미분 이론에 나오는 Goursat 표

준형(normal form)으로의 좌표변환시 요구되는 조건과 동일한 의미를 갖는다[2]. 그러나 이동 로봇을 포함한 대부분의 논홀로노믹 시스템은 2개의 입력에 의해서 2차 분포 Δ 를 갖고 있으며 이러한 경우에 대해서는 논홀로노믹 시스템을 체인형으로 변환해 주는 입력과 좌표변환을 구할 수 있게 된다[1]. 예를 들면 그 기구학 모델이 식 (6)과 같이 주어지는 차륜구동형 이동 로봇의 경우 식 (10)과 식 (11)과 같은 좌표변환과 입력 변환을 행하면 체인형 논홀로노믹 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \eta_2 \\ u_2 &= \eta_1 - \eta_2 x_3 \end{aligned} \quad (11)$$

또한 식 (7)과 (8)로 주어지는 차량형 이동 로봇의 경우에 있어서는

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \frac{1}{l} \sec^3(\theta) \tan(\beta_s) \\ x_3 &= \tan(\theta) \\ x_4 &= y \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \eta_1 \\ u_2 &= \frac{3}{l^2} \sin(\theta) \sec^5(\theta) \tan^2(\beta_s) \eta_1 + \frac{1}{l} \sec^3(\theta) \sec^2(\beta_s) \eta_2 \end{aligned} \quad (13)$$

III.2 백스테핑에 의한 경로 제어기의 설계

백스테핑 기법은 Kokotovic에 의해서 제안된 제어 설계 기법으로써 Lyapunov 함수에 근거를 둔 제어기 설계를 보다 체계적으로 할 수 있으며 비선형 제어 이론에서 확립된 피드백 선형화 기법의 문제점을 해결할 수 있다[5][6]. 예를 들어 다음과 같은 비선형 시스템을 안정화 시킬 경우를 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi \\ \dot{\xi} &= u \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)와 같은 비선형 시스템에 대해서 제어기를 설계하고자 할 경우 ξ 를 가상입력으로하는 부분 시스템이 $\xi = \alpha(x)$ 에 의해서 안정화 될 수 있으며 그 근거로써 $\dot{V}_x(x) \leq 0$ 를 만족시키는 양함정 함수 $V_x(x)$ 를 선택할 수 있다면 전체 시스템 (14)를 안정화 시키는 제어기는

$$u = -c(\xi - \alpha(x)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} (f(x) + g(x)\xi) - \frac{\partial V_x}{\partial x} g(x) \quad (15)$$

로 주어질 수 있으며 그 제어기의 안정성은 다음과 같은 Lyapunov 함수에 의해서 보장된다.

$$V(x) = V_x(x) + (\xi - \alpha(x))^2 \quad (16)$$

이와 같이 백스테핑 기법에 의해서 제어기를 설계방법은 제어 대상시스템이 적분기에 의해서 증가되는 Triangular 구조를 가질 때 Lyapunov 함수 의미에서 안정성을 보장해 주는 제어기를 체계적으로 찾아낼 수 있는 방법을 제공해 줄 뿐만 아니라 매 단계에서 부분 시스템의 특성에 따라 제어기의 구조를 변경할 수 있는 편리한 도구를 제공해 준다. 이를 토대로 차륜구동형 이동 로봇에 대해서 경로 제어기를 설계해 보기로 하자. 차륜구동형 이동 로봇의 기구학 모델은 식(10)과 식(11)에 의해서 다음과 같은 체인형 논홀로노믹 시스템으로 표현된다.

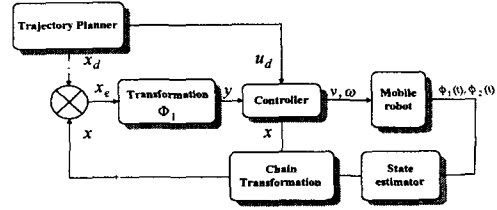


그림 4. 경로 제어기의 블록도

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ x_3 &= x_2 u_1 \end{aligned} \quad (17)$$

이때 이동 로봇의 경로 계획기의 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d} &= u_{1d} \\ \dot{x}_{2d} &= u_{2d} \\ \dot{x}_{3d} &= x_{2d} u_{1d} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (14)와 (15)로부터 오차 다이내믹스는

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1e} &= u_1 - u_{1d} \\ \dot{x}_{2e} &= u_2 - u_{2d} \\ \dot{x}_{3e} &= x_{2e} u_{1d} + x_2 (u_1 - u_{1d}) \end{aligned} \quad (19)$$

로 주어지며 오차 다이내믹스의 평형점을 점근적으로 안정화시키는 비선형 제어기를 백스테핑 기법을 적용하여 설계하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{2d} - c_1 x_{2e} - u_{1d} (x_{3e} - x_2 x_{1e}) \\ u_1 &= u_{1d} - c_2 x_{1e} + u_2 (x_{3e} - x_2 x_{1e}) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 c_1, c_2 는 설계변수이다. 또한 차량형 이동 로봇은 식(7)-(8)처럼 4차 시스템으로 표현되고 따라서 4차의 체인형 논홀로노믹 모델을 갖는다. 이 시스템에 대해서 백스테핑 기법을 적용하여 경로 제어기를 설계해 보면 다음과 같은 제어기의 입력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{2d} - c_3 (x_{2e} + x_{4e} - x_3 x_{1e}) - u_{1d} (x_{3e} - x_2 x_{1e}) \\ u_1 &= u_{1d} - K [-c_4 x_{1e} + (x_{3e} - x_2 x_{1e}) u_2] \end{aligned} \quad (21)$$

이상에서 고찰한 제어기 설계 과정을 종합해 보면 본 논문에서 제안한 경로 제어기는 그림 4와 같이 구성된다.

IV. 모의실험 및 결과

III장에서 설명한 경로 제어기의 타당성을 검증하기 위해서 몇 가지 모의실험을 수행해 보기로 한다. 그림 5를 살펴보면 기준경로가 원점에서 출발하여 x축 방향으로 0.1 m/s로 생성되고 이동 로봇의 초기 위치가 y축 방향으로 0.1m 떨어져 있을 때 경로 제어기에 의해서 기준 경로로 차륜 구동형 이동 로봇이 수렴해 가는 과정을 보여주고 있다. Kanayama[3]가 차륜 구동형 이동 로봇에 설계한 경로 제어기와 비교해 보면 식 (20)과 같이 백스테핑에 의해서 설계된 제어기는 수렴 속도는 Kanayama의 제어기 보다 다소 느리지만 추종 경로에 있어서 오버슈트 현상이 발생하지 않지 않음을 알 수 있다. 그림 6은 회전 운동에 대한 이동 로봇의 경로 추종 응답을 보여준다. 경로 제어기는 직선 운동 보다 회전 운동에 대해서 수렴 속도가 느리다는 것을 관찰할 수 있는데 이는 회전각 θ 가 변환된 시스템의 입력에 가장 가깝게 나타나게 되고 이 변수를 통하여 내부의 다른 변수의 점근적 수렴을 이끌어 내도록 동

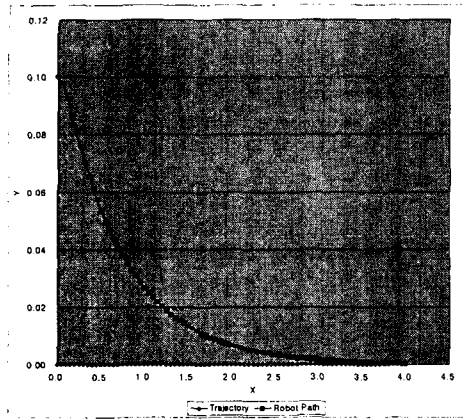


그림 5. 차륜형 이동 로봇의 직선운동 추종특성

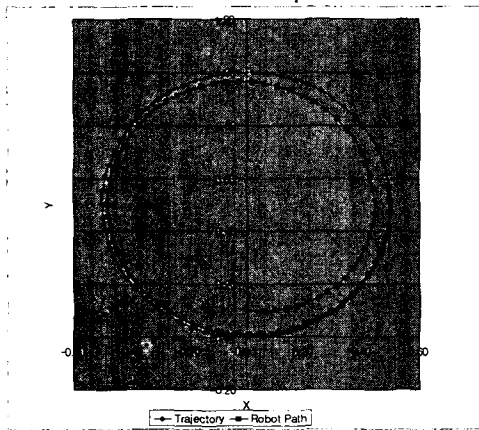


그림 6. 차륜구동형 이동 로봇의 회전 운동 추종 특성

작하므로 결과적으로 θ 의 오차는 가장 늦게 수렴하게 된다. 그림 7은 차륜형 이동 로봇이 직선으로 발생하는 기준 경로를 추종하는 특성을 나타낸다. 이를 관찰해 보면 차륜 구동형 이동 로봇의 모의실험에서 나타나지 않는 오버슈트 현상을 관찰할 수 있다. 이는 차륜 구동형 이동 로봇이 고정 휠의 회전 각도의 차이에 의해서 로봇의 회전운동을 발생시키는 것에 비해 차륜형 이동 로봇의 경우 두 개의 고정 휠의 회전각의 차이와 현재 조향 휠의 각도의 조합에 의해서 이동 로봇의 회전운동이 발생하고 조향 휠이 입력에 의해서 지연되므로 나타나는 현상이라고 볼 수 있다. 이는 차륜형 이동 로봇이 차륜 구동형 이동 로봇에 비해 제어하기 어렵다는 사실을 보여준다.

V. 결론

본 논문에서는 백스테핑 기법에 의한 이동 로봇 시스템의 경로 제어기의 설계 알고리즘의 타당성을 분석하였다. 제안한 제어기의 성능을 살펴보면 차륜 구동형 이동 로봇에 적용한 Kanayama[3]의 경로 제어기에 비해 수렴 속도는 떨어지지만 오버슈트 현상이 발생하지 않아 곡률의 변화가 많은 회전 경로에 대한 수렴성이

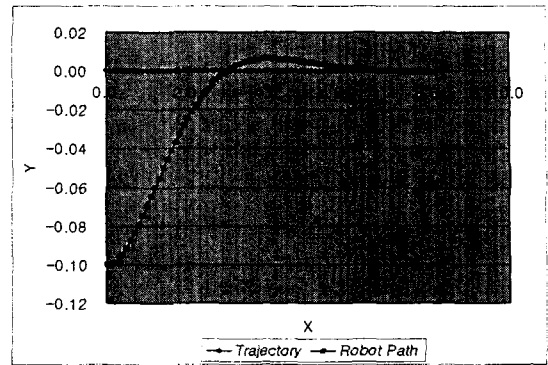


그림 7. 차륜형 이동 로봇의 직선경로 추종특성

뛰어나고 차륜형 이동 로봇의 경우에 있어서는 Walsh[2]의 경로 제어기와 비슷한 성능을 나타내는 것을 볼 수 있었다. 본 논문에서 제안한 경로 제어기는 체인형 논홀로노믹 모델에 대해서 설계한 경우에 해당하기 때문에 특정 로봇에 대한 Kanayama의 경로 제어기 혹은 자코비안 선형화에 기반을 둔 Walsh의 경로 제어기와는 달리 체인형으로 변경 가능한 모든 형태의 이동 로봇에 대해서 적용할 수 있다는 장점을 갖는다. 한편 d'Andrea-Novel[4]에 의해서 제안된 피드백 선형화 기법에 기반을 둔 경로 제어기에 비해 설계하는 과정이 시행착오의 과정을 반복하지 않고 보다 체계적임을 알 수 있었다.

VI. 참고문헌

- [1] R. M. Murray and S. S. Sastry, "Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 38, pp. 700-716, May 1993
- [2] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry, R. Murray, J. P. Laumond, "Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints," Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Nice, France, May 1992
- [3] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi, "A stable tracking control method for a nonholonomic mobile robot," IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems(IROS'91), Osaka, pp. 1236-1241, 1991.
- [4] B. d'Andrea-Novel, G. Campion, G. Bastin, "Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots by State Feedback Linearization", Journal of Robotics Research, Vol. 14, No. 6, pp. 543-559, December 1995.
- [5] Z. P. Jiang and H. Mijmeijer, "A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, No. 2 pp. 265-279, 1999
- [6] M. Kritic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons INC., 1995
- [7] G. Campion, G. Bastin, and B. d'Andrea-Novel, "Structural properties and classification of dynamical models of wheeled mobile robots," IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 1, pp. 47-62, February 1996.
- [8] R. W. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilization," In *Differential Geometric Control Theory*, R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann(Eds.), Boston: Birkhauser, pp. 181-191, 1983.