

## Second order grating CCGSE-DFB 레이저 해석

박해령, 김효창\*, 이연호  
 성균관대학교 전기 전자 및 컴퓨터 공학부, \* 동경공업대학교

### Concentric-Circle-Grating Surface Emitting (CCGSE)-DFB Laser with second order grating

Hae-Ryeong Park, Hyo-Chang Kim, Yeon-Ho Lee  
 Dept. of Electrical and Computer Engineering, SungKyunKwan Univ.  
 E-mail : jimmy747@hanmail.net

#### Abstract

Concentric-Circle-Grating (CCG) cavity is analyzed by coupled mode theory. In this case concentric grating is acting as both feedback element and output coupler. In our calculations radiation loss terms are included in guided coupled mode equations. The surface-emitted field distribution is obtained in self-consistent manner.

#### I. 서론

Concentric-Circle-Grating (CCG) 공진기는 최근 넓은 방출 면적과 low divergence (below  $1^\circ$ ) circular 출력을 가지고 있어 주목되고 있다. 이 논문에서 2차 Bragg 격자는 표면방출을 얻기 위해서 이용되며, 또한 feedback요소와 출력 빔과의 결합 요소로서의 역할을 하게 된다. 즉, Bragg 격자를 feedback element와 output coupler로 간주한다. 본 논문에서 1차 Bragg diffraction은 도파로 내의 도파 방향과 반대 방향으로, 2차 Bragg diffraction은 도파 방향의 수직으로 일어난다.

지금까지의 연구는 이 두 가지 역할을 별개로 간주해 왔다. 초기에는 1차 Bragg 격자를 가정함으로써 radiation loss를 고려하지 않고 도파로 내의 모드 형태만을 분석하였다.[1],[2] 반면에 radiation field를 구하는 방법에는 크게 두 가지 방법이 있다. 첫 번째 방법은 field expansion boundary perturbation method를 이용하여 far-field radiation pattern과 standing guided waves를 구하는 것이고 [3],

두 번째 방법은 volume-current method를 이용하여 r차의 azimuthal order mode의 far-field radiation pattern을 구하는 것이다.[4] 그러나 이 방법은 위에서 언급했듯이 Bragg grating을 단지 radiation output coupler로서만 가정했고 radiation mode와 guided mode 사이의 interaction은 무시했다.

본 논문에서는 두 가지 요소를 모두 적용시키기 위해 Lorentz reciprocity 관계식을 이용하여 4개의 결합 파동 방정식을 구한다. 다음 radiation term을 guided coupled mode equation에 포함시킴으로써 threshold gain 과 detuning 주파수에 미치는 영향을 컴퓨터 모의 실험에 의하여 계산하였다.

#### II. coupled mode equation

그림 1에서와 같이 원형 격자가 완전하게  $\theta$  방향으로 대칭이면 원형 도파로 구조는 fundamental slab mode와 the lowest order azimuthal mode를 지원한다.

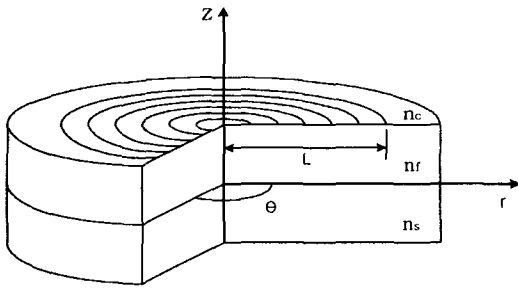


그림 1. Concentric-circle grating을 가진 three-layer waveguide 구조

본 논문에서는 TE-mode 사이의 coupling만을 고려한다.  $E_1, E_2$  는 전계,  $H_1, H_2$ 는 자계,  $P_1, P_2$ 를 이들에 의해 여기된 편광이라 하면 Lorentz reciprocity 관계식은 복소 맥스웰 방정식 (1)과 (2)에서부터 식 (3)과 같이 주어진다.

$$\nabla \times E = i\omega\mu_0 H \quad (1)$$

$$\nabla \times H = -i\omega\epsilon_0 E - i\omega P \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (E_1 \times H_2^* + E_2^* \times H_1) = i\omega P_1 E_2^* - i\omega P_2^* E_1 \quad (3)$$

도파로 내의 다양한 cylindrical wave를 발생시키는 광원은 P이다. 여기서 field 2가 도파로 모드라고 가정하면 P<sub>2</sub>는 0이다.  $\theta$ -z 평면으로 적분하고 divergence theorem을 적용하면 전계와 자계 그리고 여기된 편광과의 관계식이 다음과 같이 나오게 된다.

$$\int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta dz \frac{\partial}{\partial r} [r(E_{1,\theta} \times H_{2,r}^* + E_{2,r}^* \times H_{1,\theta})] = i\omega \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r d\theta dz P_1 E_2^* \quad (4)$$

### II-1 Wave Equation

그림 1의 concentric circle grating waveguide 구조에서 맥스웰 방정식을 이용하여

wave equation을 구하면 다음과 같다.

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon) \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

식 (5)의 wave equation을 변수분리해서 z 방향,  $\theta$  방향과 r 방향으로 각각 풀면 z 방향의 식은 planar dielectric waveguide의 slab mode를 나타내며,  $\theta$  방향은 정확하게 원이라고 가정했기 때문에  $\theta$  방향의 식은  $\theta$  값에 대하여 일정하기 때문에 무시한다. 그리고 r 방향에 대한 식을 cylindrical wave의 진행을 고려하면, 해는 Hankel 함수가 된다. 이 논문에서는 TE mode 만을 고려하므로  $E_z=0, H_z \neq 0$  이다. 따라서 wave equation의 해는 다음과 같다.[2]

$$H_z = H_0^{(1)}(\beta_m r) \quad (6)$$

$$E_\theta = -\frac{i\omega\mu_0}{\beta_m^2} \frac{dH_0^{(1)}(\beta_m r)}{dr} \quad (7)$$

$\beta_m$ 은 guide mode의 전파상수이며,  $H_0^{(1)}(\beta_m r)$ 은 Hankel 함수의 1종으로 outgoing wave를 나타낸다.  $H_0^{(2)}(\beta_m r)$ 은 Hankel 함수 2종으로 incoming wave를 나타낸다. 이를 바탕으로 일반적인 손실이 없을 때 P<sub>1</sub>과 야기된 transverse field component를 guided outgoing wave와 guide incoming wave, radiated outgoing wave, radiated incoming wave로 각각 분류해서 식(4)에 넣고 풀면 다음의 radiation loss를 포함한 coupled mode equation이 나온다. [5]

$$\frac{dr_0(r)}{dr} = (\alpha + i\delta - \xi)r_0(r) - e^{-\beta z} (K_{d,d}^{(2)} + i\eta)s_0(r) \quad (8)$$

$$-\frac{dr_0(r)}{dr} = (\alpha + i\delta - \xi)s_0(r) + e^{-\beta z} (K_{d,d}^{(2)} + i\eta)r_0(r) \quad (9)$$

여기서,

$$\xi = \pi \sum K_{d,r}^{(-1)} K_{r,d}^{(1)} \left( \frac{\beta_r}{\rho} \right), \eta = \pi \sum K_{d,r}^{(-1)} K_{r,d}^{(-1)} \left( \frac{\beta_r}{\rho} \right)$$

$\alpha$ 와  $\delta = \beta - 2\pi/\Lambda$ 는 각각 도파로 내의 gain과 detuning 주파수를 나타낸다. 그리고  $\beta$ 는 r방향으로 guided mode의 전파 상수를 나타내며,  $\beta_r$ 와  $\rho$ 는 각각 r방향과 z방향으로 radiation mode의 전파 상수를 나타낸다.  $K_{d,d}^{(2)}$ 와  $K_{r,d}^{(1)}$ 는 각각 guided mode간의 결합 계수, guided mode와 radiation mode와의 결합 계수를 나타낸다.  $\xi$ 는 표면방출에 의한 손실을 나타내며  $\eta$ 는 incoming wave와 outgoing wave 사이의 결합계수의 수정 항을 나타낸다.

## II-2 Threshold Gain

식(8)과 (9)의 일반적인 해를 식 (10)과 (11)로 가정한다.

$$r_0(r) = r_1 e^{\gamma r} + \gamma_i(\gamma) s_2 e^{-\gamma r} \quad (10)$$

$$s_0(r) = s_2 e^{-\gamma r} + \gamma_o(\gamma) r_1 e^{\gamma r} \quad (11)$$

여기서

$$\gamma_i(\gamma) = \frac{r_2}{s_2} = e^{-i\omega z} \frac{\gamma - \alpha + i\delta - \xi_r}{K_{d,d}^{(2)} + i\eta_r} \quad (12)$$

$$\gamma_o(\gamma) = \frac{s_1}{r_1} = e^{i\omega z} \frac{K_{d,d}^{(2)} + i\eta_r}{\gamma - \alpha + i\delta - \xi_r} \quad (13)$$

위식에서  $\gamma = \pm \sqrt{(\alpha + i\delta - \xi_r)^2 + (K_{d,d}^{(2)} + i\eta_r)^2}$ 이며, 식 (12)와 (13)은 waveguide 내의  $r=0$ 과  $r=L$  사이 incoming wave와 outgoing wave의 amplitude의 비율을 나타낸다. 이것의 값은 항상 1보다 작거나 같아야 한다. 식 (10)과 (11)을  $r=0$ 과  $r=L$ 에서  $r_0(0) = -s_0(0)$ 와  $s_0(r=L) = 0$ 의 경계조건을 적용시키면, 다음의 2개의 선형적인 방정식이 나온다.

$$r_1 + \gamma_i(\gamma) s_2 = -s_2 - \gamma_o(\gamma) r_1 \quad (14)$$

$$s_2 e^{-\gamma L} + \gamma_o(\gamma) r_1 e^{\gamma L} = 0 \quad (15)$$

그림 2는 식(14)과 (15)의 nontrivial 해를 구하기 위해 determinant를 0로 놓았을 때  $r=0$ 에서 threshold gain과 detuning 주파수의 관계를 도시하였다.[1] 그림에서 보듯이 threshold gain은 grating 개수가 500개일 때보다 1000개일 때는 더 낮다, 또한 표면방출에 의한 손실이 있는 경우는 표면 방출에 의한 손실이 없는 경우보다 2 ~ 5%정도 높아짐을 알 수 있다.

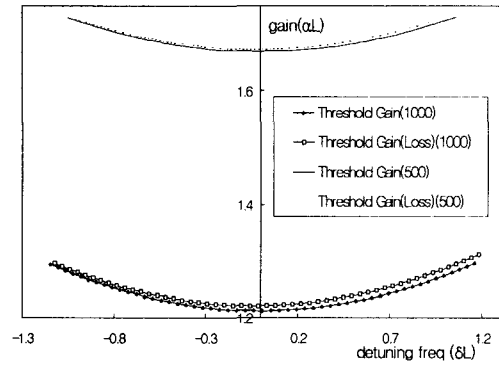


그림 2.  $r=0$ 에서 threshold gain과 detuning 주파수의 관계

## II-3. Radiation Field

$E_{1,\theta}$ 는 field 2에 의하여 생겨난 field중  $E_1$ 의  $\theta$ 방향 성분이다.  $E_{1,\theta}$ 는 radiated incoming, radiated outgoing, guide incoming, guide outgoing mode를 모두 포함한다. 따라서 Radiation field를 구하기 위해  $E_{1,\theta}$ 의 outgoing radiation mode만을 구하면 다음과 같다.

$$E_{1,\theta} \approx - \sum \int_{\rho=0}^{\infty} d\rho \frac{i\omega\mu_0}{\beta^2} [g_{o,0}(\rho, r) \frac{dH_0^{(1)}(\beta_\rho r)}{dr} - g_{i,0}(\rho, r) \frac{dH_0^{(2)}(\beta_\rho r)}{dr}] \phi_\rho(z)$$

$$= 2e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sum \int_{\beta_p=0}^{\infty} d\beta_p \left(\frac{\beta_p}{\rho}\right) \frac{\omega\mu_0}{\beta_p} \left[ \int_{r=L}^0 dr \sqrt{\frac{\pi\beta_p r}{2}} H_1^{(1)}(\beta_p r) [K_{r,d}^{(1)}(r) + iK_{r,d}^{(-1)}(r)] J_1(\beta_p r) \phi_p(z) \right] \quad (16)$$

위의 식에서부터 z축에 대하여 field의 pattern을 알 수 있다. 그림 3에서는 radiation pattern을 far field(z=5000λ)에서 r의 방향에 대하여 grating의 개수를 100, 500, 1000개로 변화시키면서 도시하였다. 이 그래프는 θ 방향으로 대칭이며 빔의 중심의 전계값이 0이 됨을 보여준다. 또한 식 (14)와 그래프를 보면, 도파로 내에서 전파하는 1차 Bessel 함수의 영향을 받았다는 것을 알 수 있다.[3] grating 개수가 많아질수록 첫 번째 lobe의 크기가 커진다. 그러므로 output power도 커짐을 알 수 있다.

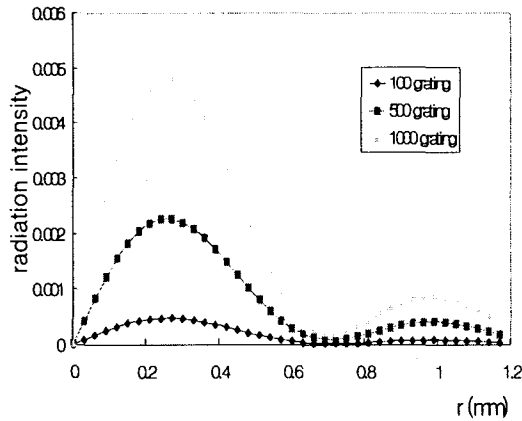


그림 3 far-field(z=5000λ)에서 grating의 개수를 변화시켰을 때의 radiation pattern 도시

### III. 결론

본 논문에서는 Bragg-grating을 output coupler로서 뿐만 아니라 radiation mode와 guided mode 사이의 interaction을 발생시키는 feedback element로서 작용할 수 있다고 가정하였다. 이것을

Lorentz reciprocity 관계식 적용시켜 radiation loss를 포함한 coupled wave equation을 구하였다. Coupled wave equation에서 표면 방출에 의한 손실이 있을 때와 없을 때의 차이점을 알아보기 위해 모의실험을 하였다. 그 결과, 표면 방출에 의한 손실을 고려했을 때 threshold gain이 2 ~ 5%정도 높아짐을 알 수 있었다. 또한 Radiation pattern을 계산하고 이것을 컴퓨터 모의 실험을 하였다. 모의 실험결과, radiation pattern은 1차 Bessel 함수의 모양과 비슷하며 중심에서의 전계값은 0이 됨을 알 수 있었다. 또한 grating 개수가 많아질수록 첫 번째 lobe의 크기가 커진다. 따라서 output power가 더 커짐을 알 수 있었다.

### IV. 참고문헌

- [1] T. Erdogan and D. G. Hall, IEEE J. Quantum Electron., vol 28, no. 3, 612-623(1992)
- [2] C. Wu, T. Makino, and S. I. Najafi, R. Maciejko, M. Svilans, J. Glinski and M.Fallahi, Vol. 29, no. 10., 2596-2606(1993)
- [3] C. Olson and D. G. Hall, IEEE J. Quantum Electron., vol. 34, 2298-2307 (1998)
- [4] R. H. Jordan and D. G Hall, J. Opt. Soc. Am, vol. 12, no. 1 84-94(1995)
- [5] Y. Yamamoto, IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-14, no. 4 , 245-258(1978)
- [6] W. Streifer, IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-12, no. 7, pp. 422-428, July 1976