피보나치 트리에서 중위순회를 이용한 상호연결망 설계

김현주, 김용석
서남대학교 컴퓨터 정보통신학과
전화: 063-620-0129 / 핸드폰: 019-616-8565

The design of interconnection network using inorder traversal on Fibonacci tree

Hyun-Joo Kim, Yong-seok Kim
Dept of Computer Information Communication, Seonam-University
E-mail: yamaco0129@hanmail.net
yekim@tiger.seonam.ac.kr

Abstract

In this paper, We propose the new interconnection network which is designed to edge numbering method using inorder traversal a Fibonacci trees and its jump sequence is Fibonacci numbers.
It has a simple (shortest path)routing algorithm, diameter, node degree.
It has a spaning subtree which is Fibonacci tree and it is embedded Fibonacci tree.
It is compared with Hypercube. We improve diameter compared with Hypercube on interconnection network measrtes.

1. 서 론

최근 대규모 프로세서를 사용하여, 구성이 가능한 메시지 전송방식의 다중컴퓨터가 선호되고 있고 다중컴퓨터의 노드 컴퓨터를 연결하기 위한 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능을 결정하는데 중요한 역할을 하며 이러한 전체 시스템의 성능은 각 처리기들의 성능과 그들의 연결망 그리고 이러한 환경하에서 수행되는 알고리즘에 의해서 결정되므로 각 처리기들의 성능을 향상시키는데는 하드웨어의 한계가 있으며 특정한 연결망 내에서 수행되는 알고리즘은 그 연결망에 전적으로 의존하는 성격을 가지기 쉽다. 그러므로 상호 연결망의 성능이 전체 시스템의 중요한 역할을 한다. 상호 연결망들을 평가하는 척도로는 분지수, 지름, 대칭성, 방송, 임베딩 등 여러 가지가 있다.

본 논문에서는 피보나치 수를 이용하여 노드 대칭적이면서 확장성이 있는 새로운 상호 연결망을 설계하는데 그 목적을 두며 대칭적인 구조를 갖고 신뢰성이 높은 통신망을 설계하는데 최적화된 위상인 원형군 그래프의 점프열이 피보나치 수열이라고 하면, 피보나치 수의 성질을 이용한 점프열의 변화에 따라 새로운 위상을 설계할수 있고 이를 통해 여러 가지 망척도면에서 우수한 성질을 갖는 새로운 상호 연결망을 설계할 수 있다.

본 논문에서는 피보나치 트리에서 중위순회 방법으로 변호매김을 하여 만들어진 피보나치 수를 원형군의 점프열로 이용하여 상호연결 망을 설계하고 상호연결 망의 최단경로 라우팅 알고리즘, 지름, 분지수 그리고 최소방송이 가능한 상호 연결망의 설계를 위해 피보나치 트리와 임베딩 문제를 다룬다. 또한 상호 연결망중에서 가장 대표적인 하이퍼큐브와 망척도면에서 비교했다.

2. 피보나치 트리에서 중위순환법을 이용한 상호연결망

2.1 중위순환법을 이용한 상호연결망의 정의

FI_n은 f_{n+3}개의 노드를 갖는 무방향 그래프이다.

f_{n+3}개의 각 노드가 0부터 f_{n+3}-1까지의 연속된 정수 번호를 갖는다. 이와 같은 FI_n을 그래프 $G(V, E)$이라할 때 노드들의 집합은 V={0,1,$\cdots$, f_{n+3}-1}이고 에지들의 집합은 E={ $(v, w)|v+ f_i \equiv w(\mathrm{mod}\ f_{n+3}), 2 \le i \le m$} 이다.

FI_n은 원형군 그래프 $C_{fn+3} = f_2, f_3 \cdots, f_n$ 이고 각각의 $f_2, f_3, \cdots, f_n$ 점프라고 한다. FI_n예는 그림 2.1과 같다.

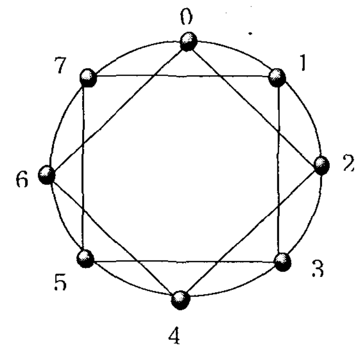


그림 2.1 FI_n의 예

2.2 중위순회방법을 이용한 번호매김 방법.

본 절에서는 피보나치 트리가 피보나치 원형군의 부그래프임을 FI_n의 스패닝 부트리임을 보인다. 본 논문에서 제안한 피보나치 트리에서 중위순환방법을 이용한 에지 번호매김은 피보나치 트리에서 노드 1부터 노드의 개수까지 서로 다른 노드 번호를 부여하고 에지 번호는 피보나치 수가 된다는 조건을 만족하는 번호매김 방법이다. 이러한 연구 결과는 피보나치 트리가 FI_n의 스패닝 부트임을 쉽게 알 수가 있다.

피보나치 트리를 정의하면 다음과 같다.

정의 2.2 피보나치 트리

(1) 높이가 0인 피보나치 트리 FT_0는 하나의 노드를 갖고 높이가 1인 피보나치 트리 FT_1 은 두 개의 노드를 갖는다.

(2) k≥2인 경우 높이가 k인 FT_k는 두 개의 피보나치 트리 FT_{k-1}과 FT_{k-2}로 이루어 졌고, 루트 노드에 의해 FT_{k-1} 은 왼쪽 부트리로 FT_{k-2} 는 오른쪽 부트리가 된다.

피보나치 트리에 대한 예는 그림 2.2와 같다.

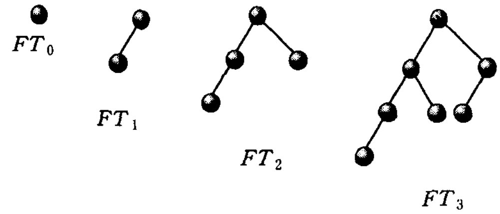


그림 2.2 피보나치 트리에 대한 예

임의의 피보나치 트리에서 모든 피보나치 수를 사용하여 에지 번호 매김을 하는 방법은 트리에서의 노드 방문 연산인 전위 순회, 중위 순회, 후의 순회 방법을 사용할 수 있다. 이때 중위 순회 방법으로 노드들을 번호 매김을 하면 피보나치 트리에서 조부모와 부모 그리고 두 자식들 사이에서는, 부모가 왼쪽 자식이며 조부모와 부모간의 차이가 f_{m+2} 이면, 부모와 두 자식간의 차이는 f_{m+1}이고 부모가 오른쪽 자식이라면 부모와 자식과의 차이는 f_m이므로 이 때의 에지 번호는 모든 피보나치 수가 나오게 된다.

피보나치 트리에서 중위순회 방법을 이용한 에지 번호 매김은 다음과 같은 방법으로 할 수 있으며, 높이가 k인 피보나치 트리를 FT_k라고 표기하면,

FT_1, FT_2, FT_3, FT_4에 대한 중위순회 방법을 이용한 에지 번호 매김의 예는 그림 2.3과 같다.

정리 2.1 모든 피보나치 트리는 중위순회 방법을 이용하여 에지 번호 매김을 할 수 있다.

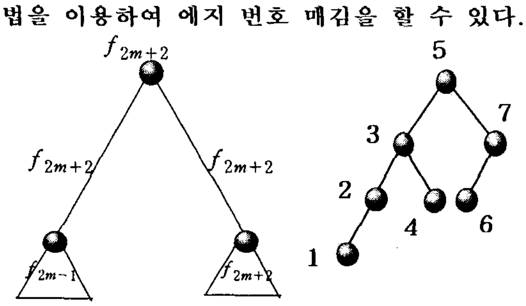


그림 2.3 중위순회 방법을 이용한 에지 번호매김의 예

2.3 피보나치 트리의 임베딩

특정한 자료구조나 계산구조를 기반으로 하는 작업을 쉽게 처리하기 위해서는 그러한 자료구조나 계산구조를 사상하는 효율적인 방법이 필요하다. 이러한 사상을 임베딩(embedding)이라한다. 그래프 G의 그래프 H 에 대한 임베딩 $f=(\varphi,\rho)$는 다음과 같이 정의한다. φ는 G의 노드 v에서 H의 노드 $\varphi(v)$로의 함수이고, ρ는 G의 에지 $e=(v,w)$에서 $\varphi(v)$와 $\varphi(w)$ 를 잇는 H의 경로 $\rho(e)$로의 함수이다. 임베딩의 비용을 측정하는 척도로는 연장율(dilation) 밀집율(congestion), 확장율(expansion) 등이 있다. G의 에지 e의 연장율은 H상에서의 경로 $\rho(e)$의 길이를 말하고, 임베딩 f의 연장율은 G의 모든 에지의 연장율중 최대값이다. H의 에지 e'의 밀집율은 e'를 포함하는 $\rho(e)$의 개수를 말한다. 임베딩 f의 밀집율은 H의 모든 에지의 밀집율의 최대값이다. 임베딩 f의 확장율은 G의 노드의 개수에 대한 H의 노드의 개수의 비를 말한다. 병렬처리의 응용 분야에 따라 각기 적합한 연결망이 존재하므로, 여러 가지 응용분야에 따른 연결망을 주어진 연결망에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 그 연결망이 다양한 응용 분야에서 효율적으로 이용될 수 있음을 의미한다. 특히 연결망 G가 연결망 H를 부그래프로 가진다는 것은 G가 H를 추가 비용 없이 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다. 임베딩 중에서 트리구조를 임베딩하는 문제는 특별한 중요성을 띄고 있다. 트리는 자료구조 또는 분할 정복 알고리즘의 기반이 되거나 NP-complete 문제의 해 공간(solution space)을 제공하는 구조로서 널리 이용되고 있기 때문이다. 즉, 트리를 효율적으로 임베딩 할 수 있다는 것은 트리 형태의 자료 구조를 쉽게 시뮬레이션 할 수 있으며 그 트리를 기반으로 하는 분할 정복 알고리즘을 효율적으로 수행할 수 있음을 의미한다.

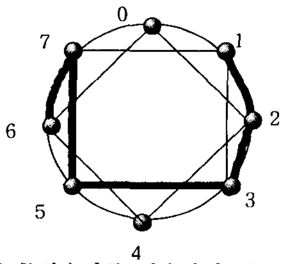


그림 2.4 중위순회를 이용하여 번호매김을 한후 FT_3의 임베딩의 예

3. 연결도와 지름

3.1 연결도.

임의의 $k-1$개의 정점이 제거되더라도 그래프가 연결되어 있고 적절한 k개의 점점을 제거 하였을때 분리되면, 그 그래프의 연결도를 k라고 한다.

정점을 제거하더라도 그래프가 분리되지 않는 완전 그래프의 연결도는 정점의 개수 $n-1$이라 정의한다

정리 3.1 FI_n은 최대 연결도를 잦는다.

증명)

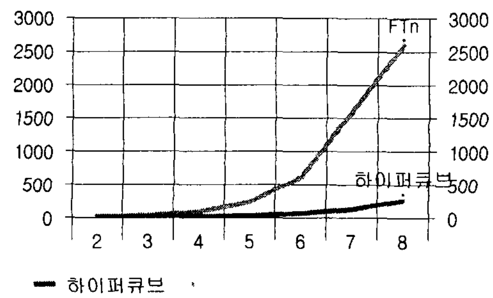
Boesch 와 Felzer가 [*BF*72]에서 크기가 가장 작은 점프는 1이고 인접한 점프의 차가 감소하지 않는 수열을 이루면, 즉 $j_1=1$이고 $j_{i+1}-j_i \le j_{i+2}-j_{i+1}$ 이면 $C_n(j_1, j_2, \cdots j_i)$의 연결도는 최대라는 결과를 발표하였다. 그러므로 FI_n의 점프열은 $(f_2, f_3, \ldots\ldots f_n)$이므로 최대 연결도를 갖는다.

3.2 지름.

지름은 연결망의 임의의 두 노드간의 최대거리인데 이는 연결망 전체에 정보를 전파하는데 드는 지연 시간의 하한값이다. FI_n일 경우 지름은 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$이 됨을 표3.1로 알 수 있다

본 절에서 지금까지 FI_n 하이퍼 큐브와 지름 비교는 다음표와 같다.

그래프3.1



하이퍼큐브와 FTn의 지름비교

표3.1

지름 \ 노드갯수	하이퍼큐브	FI_m
2	4	13
3	8	55
4	16	89
5	32	233
6	64	610
7	128	1,597
8	256	4,181
9	512	10,946
10	1,024	28,657
11	2,048	75,025
12	4,096	196,418
13	8,192	514,229
14	16,384	1,149,851
15	32,768	3,131,742
16	65,536	8,245,375
17	131,072	21,604,383
18	262,144	56,567,774
19	524,228	148,098,936
20	1,048,576	204,666,710

4. 라우팅 알고리즘

라우팅 알고리즘에서 메시지가 전달되는 경로 상에 있는 각 노드들을 전달과정에서 새로운 원시노드로 간주되고 목적노드에 한 단계 가까운 이웃 노드로 메시지를 전달하는데 탐욕기법을 사용하여 가장 큰 점프값을 가진 에지로 메시지를 전달함으로서 최단거리 라우팅이 이루어진다

./* $dist(v, w) = (v, w) | v + f_i \equiv w (\mathrm{mod}\ f_{n+3})$

/* v. 원시노드, w, 목적노드*/

Route$(v. w)$

{ if $dist(v, w) \frac{1}{2} (f_{n+3} - 1)$

then $dist(v, w) = f_{n+3} - dist(v, w)$

While $(v! = w)$

{ for $(i = n; i \geq 0; i^{--})$

Route $(v + f_i, w)$;

}

}

5.결론 및 추후과제

본 논문에서는 새로운 병렬 컴퓨터의 위상을 설계하기 위한 방법으로 원형군에서 점프열이 피보나치 수열이라고 하면 피보나치 수의 성질에 의한 점프열의 변화에 따라 여러 가지 위상을 설계할 수 있고, 이러한 위상에서 피보나치 수의 성질과 대칭성을 이용하여, 피보나치트리에서 중위 순회방법을 이용하여 번호매김을 하여 피보나치 트리가 스패닝 부트리가 되는 상호 연결망을 설계하여 최소시간에 방송을 할 수 있고 상호 연결망에서 통신지연시간의 하한값인 지름에서는 하이퍼큐브의 노드수가1,048,576개 일 때 하이퍼큐브의 지름은 20이 되고, 본 논문에서 제안한 중위순회방법을 이용한 FI_n방식에서는 지름이 14일 때 1,149,851개의 노두수를 가지고 있다.이것은 하이퍼큐브에 비하여 지름은 최대 30%정도 개선되었고, 하이퍼큐브와 FI_n의 지름이 20일때, 노드수는 하이퍼큐브가 1,048,576이고 FI_n은 204,666,710이므로 노드수에서는 약 200배 정도가 개선되었다.

추후 연구과제로는 지름과 에지수를 고려하여 상호연결 망의 척도를 비교하는 것이 필요하다.

5.참 고 문 헌(Reference)

[1.] Y.saad and M.H Schultz, "Topological properties of hypercubes," IEEE Trans. on computers, Vol 37, pp867-872, 1988

[2] K.Efe, "The crossed cube architecture for parallel computation,"

[3].D.D.Scott, and J.Brandenburg, "Minimal mesh embedding in binary hypercubes," IEEE Trans. Computers, Vol> 37, pp. 1284-1285, 1988

[4] Lim, Hyeong-Seok. "On the labeling of graphs and their applications," Ph.D.thesis, KAIST, 1993

[5]. Lim, Hyeong-Seok. "On the labeling of graphs and their applications," Ph.D.thesis, KAIST, 1993