

쿼션트 그래프를 이용한 새로운 근사최소차수 순서화 방법
A new approximate minimum degree ordering algorithm
using the quotient graph.

박찬규*, 도승용**, 박순달**

* 한국전산원, ** 서울대학교 산업공학과

Abstracts

선형계획법으로 최근에 많이 사용되는 아핀법(affine method), 장벽법(barrier method) 등의 내부점 선형계획법에서는 $A\Theta A^T$ (A 는 제약식 행렬, Θ 는 대각원소가 양인 대각행렬)형태의 대칭양정치(symmetric positive definite) 행렬의 선형방정식을 푸는 과정이 필요하다. 일반적으로 대형선형계획법 문제의 제약식 행렬은 희소하다는 특성을 가지는데 이 경우 내부점 선형계획법에서 나타나는 대칭양정치 행렬도 역시 희소행렬이 된다. 내부점 선형계획법에서는 전체 소요 시간의 많은 부분이 대칭양정치 선형시스템을 푸는 데에 소요되므로 효율적으로 이 선형방정식을 풀어내는 것이 내부점 선형계획법 프로그램의 성능을 크게 좌우한다.

대칭양정치 선형시스템을 푸는 방법으로 주로 출레스키분해(Cholesky factorization)를 사용한다. 출레스키분해는 $A\Theta A^T = LL^T$ (단, L 은 하삼각행렬)로 분해하는 것으로 이 때 L 을 출레스키 인자(Cholesky factor)라 한다.

희소행렬에 대하여 출레스키분해를 수행할 때에는 출레스키인자의 비영요소(nonzero)수를 줄이기 위하여 순서화(ordering)과정을 거친다. 추가되는 비영요소의 수를 최소화 하는 행순서를 구하는 문제는 NP-Hard로 알려져 있어, 실제 사용되는 발견적 순서화 방법으로는 최소차수순서화(minimum degree ordering)와 최소부족수순서화(minimum deficiency ordering) 등이 있는데, 특히 최소차수순서화 방법이 수행속도가 빨라 많이 사용되고 있다. 반면, 최소부족수순서화 방법은 계산량이 많으나 출레스키인자에 추가되는 비영요소의 수가 작다는 장점이 있어 계산량을 줄이기 위한 연구가 수행되고 있다.

최소차수 순서화 방법은 현재의 삭제 그래프에서 인접점의 수가 가장 적은 점을 삭제점으로 선택하는 방법이다. 최소차수 순서화 방법에서는 삭제그래프를 표현하는 방법이 순서화의 효율에 중요한 영향을 끼친다. 삭제그래프를 구현하는 데 사용되는 자료구조로 George 등이 제안한 쿼션트 그래프(quotient graph)와 Speelpenning이 제안한 클릭저장구조가 있다. 또한 최소차수순서화 방법의 수행속도를 향상시키기 위한 방법으로 구별불능점(indistinguishable node), 복수삭제(multiple elimination), 외부차수(external degree), 부분 차수수정(incomplete degree update) 등의 기법들이 제안되었고, 특별히 클릭저장구조에서 사용될 수 있는 클릭흡수(clique absorption) 기법이 제안되었다. 대부분의 내부점 선형계획법 프로그램에서는 쿼션트 그래프를 이용한 최소차수순서화 방법을 사용하고 있다.

최소차수 순서화 방법의 수행시간 중에서 가장 많은 부분을 차지하는 것은 삭제그래프를 변형하고 차수를 수정하는 부분이다. 따라서 삭제그래프를 변형하고 차수를 수정하는 데 걸리는 시간을 줄이는 것이 최소차수 순서화에 있어서 중요하다.

본 연구에서는 차수수정에 걸리는 시간을 줄이기 위한 두 가지 방법을 제안하였다.

첫째 차수의 하한 개념을 도입하여 차수수정에 걸리는 회수를 줄일 수 있다. 최소차수 순서화 방법에서 어떤 점 i 가 삭제되는 경우에는 점 i 의 인접점들의 차수를 수정하게 된다. 하지만 차수의 하한을 이용하여 다음 단계에서 최소차수를 갖지 않을 것으로 예상되는 점들은 차수수정을 연기할 수 있다. 따라서 차수의 하한을 이용하면 차수수정을 해야하는 점들의 수를 줄일 수 있다.

둘째 차수의 상한을 이용한 새로운 근사최소차수 순서화 방법을 개발하였다. 차수의 상한을 이용하면 어떤 점 i 의 실제 차수를 직접 계산하지 않고 근사차수를 사용할 수가 있기 때문에 차수수정에 걸리는 시간을 줄일 수 있다.