대한산업공학회/한국경영과학회 2000 춘계공동학술대회 논문집. 2000년4월21~22일. 경남대학교
Session 0A3.3

그로벌최적화 문제인 유효해집합위에서의 최적화 문제에 대한 선형계획적 접근방법*

A linear program approach for a global optimization problem of optimizing a linear function over an efficient set

송정환
JungHwan Song
한양대학교
자연과학대학 수학과

요약

그로벌최적화문제(Global optimization problem)의 부류인 다목적선형계획법 ($MOLP$) (Multiple objective linear programming)에서 결정된 유효해집합(a set of efficient solutions)위에서 선형함수 최적화문제 (P)는 해집합이 볼록집합이 아니므로(nonconvex set) 일반적인 선형계획법을 활용하가가 어렵다. 현재까지 (P)의 최적화를 위해서 유효해집합의 모든 꼭지점(extreme point)를 찾거나 일련의 선형계획문제들을 최적화 하여 최적해를 찾는 접근방법들이 있다. 이러한 방법들에는 ($MOLP$)의 해집합의 차원(dimension)이 커짐에 따라 문제해결이 실제적으로 가능하지 않는 경우가 많다. 본 연구는 주어진 선형함수와 다목적선형함수들간 관계를 고찰하여 선형목적함수를 구성하고 그 목적함수를 이용하여 주어진 문제 (P) 의 최적해를 찾는 선형계획적 접근방법을 제안한다.

Abstract

The problem (P) of optimizing a linear function d^Tx over the set of efficient set for a multiple objective linear program (M) is difficult because the efficient set is nonconvex. There are some interesting properties between the objective linear vector d and the matrix of multiple objectives C and those properties lead us to establish criteria to solve (P) with a linear program. In this paper we investigate a system of the linear equations $C^T\alpha = d$ and construct two linearly independent positive vectors u, v such that $\alpha = u - v$. From those vectors u, v, solving an weighted sum linear program for finding an efficient extreme point for the (M) is a way to get an optimal solution (P). Therefore our theory gives an easy way of solving nonconvex program (P) with a weighted sum linear program.

1. 서론

다목적선형계획법은 주어진 볼록다면체(convex polyhedron)인 가능해집합(set of feasible solutions) X위에서 두 개이상의 선형목적함수들을 최적화시키는 문제이다. 다양한 목적을 추구하는 현실세계에서는 목적함수가 두 개이상일 경우가 일반적이며 두 개의 목적함수를 동시에 최적화하는 것은 불가능한 경우가 많다. 따라서 모든 목적함수의 최적해(optimal solution)가 아니더라도 그보다 우수한 해를 찾을 수 없는 상태에서의 해를 찾는 것을 벡터최적화 문제로 모델화 하여 벡터들의 각 원소들의 크기를 비교하여 각 원소를 최적화 한다. 이러한 벡터최적화 문제가 수리계획모델인 다목적선형계획법 (multiple objective linear programming)으로 발전되어 왔다.[1,2]

본 논문에서는 가능해집합 X를 유계(bounded)인 볼록다면체(convex polyhedron)라 가정하고 일반형태(standard form)로서 다음과 같이 $X = \{ x \in R^n \mid (A, I)x = b,\ x \geq 0\}$로 표현하기로 한다. 여기서 $(A, I) \in R^{m \times n}$이고 $b \in R^n$, $b > 0$이다. 두 개 이상인 다목적 선형함수들 $c_1^Tx,\ c_2^Tx, \ldots,\ c_k^Tx$을 행렬로 Cx라 표현하고 다목적선형계획법 ($MOLP$)을 다음과 같이 모델화 한다.

$$(MOLP) \quad \begin{array}{ll} \max & Cx \\ s.t. & x \in X \end{array}$$

다음과 같이 가능해 집합 X위에서의 유효해를 정의한다.

정의 1. [1] 가능해집합 X의 하나의 가능해 $x^0 \in X$가 유효해(efficient solution)라 함은 $Cx \geq Cx^0$이고 $Cx \neq Cx^0$ 인 가능해 x가 X에 없을 때를 말한다.

---

* 이 논문은 1999년도 교내연구비에 의하여 연구되었음

본 논문에서는 벡터의 크기를 표현하는 방법을 두가지로 정의한다. 위의 정의에서와 같이 $x^0 \in X$가 유효해일 필요충분조건인 $Cx \geq Cx^0$이고 $Cx \neq Cx^0$을 하나의 식으로 $Cx \geq Cx^0$ 로 표현하고자 한다.

유효해집합은 일반적으로 非블록집합(nonconvex set)이고 연결집합(connected set)이다.[3,4,5,6,7,8,9] 이러한 유효해 집합의 모든 해를 찾는다는 것은 선형계획법에서 가능해집합을 구하는 문제의 계산상의 어려움과 동일하다 [9,10,11,12,13,14]. 여러 가지 목적함수 Cx를 최적화하는 과정에서의 유효해들 중에서 최종 의사결정자의 목적함수 d^Tx 에 따라 결정되는 최적해를 구하는 문제를 다목적선형계획법 ($MOLP$)에서 유효해들의 집합을 E 라 하고 목적함수 d^Tx 최적화 문제 (P)를 다음과 같이 모델화 하자.

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & d^Tx \\ s.t. & x \in E \end{array}$$

이러한 E 위에서 선형함수 최적화문제 (P)는 집합 E가 비볼록집합이기 때문에 글로벌최적화 문제 부류이다. 비볼록집합인 유효해집합을 구하는 문제는 계산상 어렵기 때문에 임의의 유효꼭지점(efficient extreme point) $x^0 \in E \cap X_{ex}$으로부터 목적함수값 d^Tx가 증가($d^Tx' > d^Tx^0$)하는 유효선분(efficient edge) $[x', x^0] \subseteq E$ 을 따라 최적화하고 현재의 유효꼭지점 x^0으로부터 목적함수값이 증가되는 유효선분이 없는 경우는 가능해 집합 X를 $\overline{X} = \{x \in X \mid d^Tx \geqq d^Tx^0\}$로 절단·축소하여 새로운 가능해 집합으로부터 정의되는 유효해 집합 $\overline{E}$에서 목적함수값 d^Tx를 증가시키는 알고리즘이다. 최악의 경우 모든 꼭지점을 모두 거쳐야 하는 문제점이 있다. 다목적선형계획법 ($MOLP$) 에서의 다목적함수벡터들 $c_1, c_2, \ldots, c_k$들과 문제 (P) 에서의 목적함수 벡터 d와의 관계를 고찰하여 양의 상수 λ_i 를 선택하여 가중치를 $C^T\lambda$와 같이 부여한 하나의 선형계획법문제 (M_λ) $\max\{ C^T\lambda \mid x \in X \}$로 모델화 하고, (M_λ)의 최적해는 (P)의 최적해와 동일하게 되도록 λ을 찾는 방법을 고찰하고자 한다.

2. 유효해(Efficient solution)

본 절에서는 주어진 다목적선형계획법에서의 유효해에 대한 기본정리들과 유효해를 찾는 하나의 선형계획법에 대해 기술하고 가능해 집합 X과 유효해집합 E과의 성질들을 고찰하자.

다음은 하나의 유효해를 찾는 방법으로 본 논문에서 사용될 정리이다. 주어진 다목적선형계획법 ($MOLP$)에서의 목적함수 벡터들에 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 각각 1보다 큰 상수를 곱하여 하나의 선형조합인(linear combination) $C^T\lambda$ 를 정의하고 $C^T\lambda$를 목적함수벡터로 간주하여 다음과 같은 선형계획법 모델 (M_λ)을 정의하자.

$$(M_\lambda) \quad \max\{\lambda^T Cx \mid x \in X\}$$

여기서 $C^T\lambda = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_k c_k$,

$\lambda_1 \geqq 1,\ \lambda_2 \geqq 1, \ldots, \lambda_k \geqq 1.$

본 논문에서는 모든 원소가 1인 벡터를 $e = (1, \ldots, 1)^T$로 표시하기로 한다.

정리 2.1. [5],[8] (M_λ)의 최적해는 ($MOLP$)의 유효해(efficient solution)이다.

3. 다목적함수 벡터들과 주어진 선형함수 벡터간 관계

주어진 다목적선형계획법 ($MOLP$)에서의 목적함수 벡터 $c_1, c_2, \ldots, c_k$들과 E 위에서 선형함수 최적화문제 (P)에서의 목적함수벡터 d 간의 관계를 다음과 같이 두가지로 구분하여

[경우 1] $d = C^T\alpha$ 를 만족하는 α 가 존재하는 경우. 즉, $d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_k c_k$ 를 만족하는 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 가 존재.

[경우 2] $d = C^T\alpha$ 를 만족하는 α 가 존재하지 않는 경우.

우선 [경우 1]부터 고려하여 보자. $d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_k c_k$ 를 만족하는 상수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 가 존재하며 행렬로 표시하면 $d = C^T\alpha$ 를 만족하는 영이 아닌 벡터 α가 존재한다. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 의 부호가 모두 음이 아닌 상수일 때 문제 (P)를 다음과 같은 선형계획법 (R)의 공통 최적해가 존재한다.[13]

$$(R) \quad \max\{d^Tx \mid x \in X\}$$

$d = C^T\alpha$를 만족하는 벡터 α가 존재하나 $\alpha \geq 0$가 아닌 경우를 고려하여 보자. 모든 $1 \leq i \neq j \leq k$에 대하여 $\alpha_i = \alpha_j$ 인 경우를 고려하면, 즉 어떤 상수 $\gamma > 0$에 대해서 $\alpha = -\gamma e$, $d = C^T\alpha$ 관계식에서 $d = -\gamma \sum_{i=1}^{k} c_i$ 이다. 2절에서 설명한 바와 같이 c_i 에 상수 $\delta \neq 1$ 를 곱하여 $\delta c_i\,(\neq c_i)$로 변경시켜도 유효해집합 구조에는 전혀 영향을 주지 않는다. 따라서 벡터 α의 각 원소가 동일하지 않다라고 가정하고 벡터 u, v를 적당한

상수 A, B로서 다음과 같이 정의하자.

$$u_i = \begin{cases} A+\alpha_i & \text{if } \alpha_i > 0 \\ B & \text{if } \alpha_i \le 0 \end{cases}, \quad v_i = \begin{cases} B-\alpha_i & \text{if } \alpha_i < 0 \\ A & \text{if } \alpha_i \ge 0 \end{cases}$$

혹은 모든 $i=1,\dots,k$에 대해서 $\alpha_i = u_i - v_i$가 되도록 벡터 $u, v > 0$ 를 선택할 수 있다.

본 논문에서는 두 벡터 u, v가 서로 선형독립(linearly independent)이라는 가정을 하였다. 그러한 선형독립인 두 벡터를 가지고서 다음과 같은 두 선형계획법을 고려하자.

$$(M_u) \quad \max\{u^T Cx \mid x \in X\}$$
$$(M_v) \quad \max\{v^T Cx \mid x \in X\}$$

정리 2.1.으로 부터 (M_u)와 (M_v)의 최적해는 유효해임을 알 수 있다. 다음절에서는 $d = C^T\alpha$ 를 만족하는 α 가 존재하는 경우와 그렇지 않은 경우에 문제 (P)의 최적해를 찾기 위한 (M_u) 와 같은 선형계획법 모델화를 고려하여 보기로 한다.

4. 문제 (P)와 선형계획법 (M_u)

다음의 두정리는 문제 (P)를 선형계획모델로 전환하여 해결하여 주는 중요한 정리들이다.

정리 4.1. $d = C^T(u-v)$를 만족하는 선형독립인 두 벡터 $u, v \ge e$가 존재하고 $x^* \in X$가 (M_u)와 (M_v)의 최적해라면 $x^* \in X$는 (P)의 최적해이다.

[증명] $x^* \in X$가 (P)의 최적해가 아니라고 가정하면 $d^T\hat{x} > d^T x^*$를 만족하는 $\hat{x} \in E$가 존재한다. 다음과 같이 세 개의 인덱스집합(index sets)들을 정의하자.

$$I = \{\, i \mid c_i^T\hat{x} < c_i^T x^* \,\}$$
$$J = \{\, j \mid c_j^T\hat{x} > c_j^T x^* \,\}$$
$$H = \{\, h \mid c_h^T\hat{x} = c_h^T x^* \,\}$$

정의된 집합에서 $I \ne \emptyset, J \ne \emptyset$이고 $u = u_I + u_J + u_H$, $v = v_I + v_J + v_H$이다.

정의된 집합 I, J, H 에 따라 다음과 같이 벡터 u_I, u_J, u_H와 v_I, v_J, v_H들을 정의하자.

$$u_{I_i} = \begin{cases} u_i & \text{if } i \in I \\ 0 & \text{if } i \notin I \end{cases}, \quad v_{I_i} = \begin{cases} v_i & \text{if } i \in I \\ 0 & \text{if } i \notin I \end{cases}$$

$$u_{J_i} = \begin{cases} u_i & \text{if } i \in J \\ 0 & \text{if } i \notin J \end{cases}, \quad v_{J_i} = \begin{cases} v_i & \text{if } i \in J \\ 0 & \text{if } i \notin J \end{cases}$$

$$u_{H_i} = \begin{cases} u_i & \text{if } i \in H \\ 0 & \text{if } i \notin H \end{cases}, \quad v_{H_i} = \begin{cases} v_i & \text{if } i \in H \\ 0 & \text{if } i \notin H \end{cases}$$

$x^* \in X$가 (M_u) 혹은 (M_v)의 최적해이기 때문에 다음의 부등식들이 성립한다.

$u^TC(\hat{x}-x^*) \le 0$ 혹은 $v^TC(\hat{x}-x^*) \le 0$이다. $u_I^TC(x^* - \hat{x}) = \gamma u_J^TC(\hat{x}-x^*)$와 $v_I^TC(x^* - \hat{x}) = \delta u_J^TC(\hat{x}-x^*)$를 만족하는 상수 $\gamma, \delta > 1$가 존재하도록 상수 A, B가 선택되었다고 가정하자. 따라서 $0 < d^T(\hat{x}-x^*) = (1-\gamma)u_J^TC(\hat{x}-x^*) + (\delta-1)v_J^TC(\hat{x}-x^*)$이므로 $u_J^TC(\hat{x}-x^*) < \dfrac{\delta-1}{\gamma-1} v_J^TC(\hat{x}-x^*)$ 이 성립한다. $x^* + \varepsilon(\hat{x}-x^*) \in X$ 가 되도록 상수 $\varepsilon > 0$을 선택하면 $d^T(x^* + \varepsilon(\hat{x}-x^*)) > d^Tx^*$을 만족하게 된다. 그러나 $\varepsilon d^T(\hat{x}-x^*)) < \{\varepsilon(1-\gamma)\dfrac{\delta-1}{\gamma-1} + \varepsilon(\delta-1)\}v_J^TC^T(\hat{x}-x^*) < 0$ 가 되므로 모순이다. 그러므로 $d^T\hat{x} > d^Tx^*$를 만족하는 $\hat{x} \in E$가 존재하지 않는다. 따라서 $x^* \in X$가 (P)의 최적해이다. □

다음은 $d = C^T\alpha$ 를 만족하는 α 가 존재하지 않는 경우 목적함수 행렬 $C^{\#T} = (C^T, d)$ 를 정의하고 그에 따른 다목적 선형계획법 $(MOLP^{\#})$을 다음과 같이 정의하자.

$$(MOLP^{\#}) \quad \max\{C^{\#}x \mid x \in X\}$$

$(MOLP^{\#})$의 유효해 집합을 $E^{\#}$ 라 하고 문제 $(P^{\#})$를 다음과 같이 정의하면

$$(P^{\#}) \quad \max\{d^Tx \mid x \in E^{\#}\}$$

$(P^{\#})$의 최적해가 (P)의 최적해가 아닐 수 있다. 즉, $(P^{\#})$의 최적해가 $(MOLP)$의 유효해가 아닌 경우이다. 충분히 작은 $\varepsilon > 0$에 대해서 벡터 $u^T = (1,\dots,1,\varepsilon)$라 하고 $(M^{\#}_u)$를 정의하자.

정리 4.2. $(M^{\#}_u)$의 최적해가 $(MOLP)$의 유효해이면 (P)의 최적해이다.

[증명] $(M^{\#}_u)$의 최적해를 x^*라 하자. 위의 정리 4.2에 의해서 $(M^{\#}_u)$의 최적해는 $(P^{\#})$의 최적해이다. $x^* \in E \cap E^{\#}$ 가 (P)의 최적해가 아니라고 가정한다면 $d^T\hat{x} > d^Tx^*$를 만족하는 $\hat{x} \in E$가 존재한다. 그러나 (P^*)의 최적해가 x^*이기 때문에 $\hat{x} \notin E^*$이며 $C\tilde{x} \ge C\hat{x}$, $d^T\tilde{x} \ge d^T\hat{x}$ 를 만족하는 $\tilde{x} \in E^*$가 존재한다. 이로부터 $d^T\tilde{x} \ge d^T\hat{x} > d^Tx^*$ 인 부등식이 성립한다. 즉, $d^T\tilde{x} > d^Tx^*$ 를 만족하는 $\tilde{x} \in E^*$가 존재하게 되는데 이는 x^*가 (M^*_u)의 최적해라는 조건에 모순된다. 그러므로 $x^* \in E \cap E^*$가 (P)의 최적해이다. □

다음 절에서는 정리4.1. 및 정리 4.2을 이용하여 문제 (P)의 최적해를 구하는 간단한 예를 들어보기로 한다.

5. 결론

예제 주어진 ($MOLP$)의 유효해집합 E 위에서 선형함수최적화 문제 (P)를 고려하자. 주어진 ($MOLP$)는 다음과 같다.

$$(MOLP) \quad \max \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$s.t. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

문제 (P)는 다음과 같이 정의 된다.

$$(P) \quad \max\{x_1 - 9x_2 \mid x \in E\}$$

주어진 ($MOLP$)의 유효꼭지점들은 $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$이다. $\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ 로부터 $f_1 = 2$, $f_2 = -1$ 이므로 $A = 10, B = 1$로 선택하면 $u = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}$. $v = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$이다.

$$(M_u) \quad \max\{13x_1 - 33x_2 \mid x \in X\}$$
$$(M_v) \quad \max\{12x_1 - 24x_2 \mid x \in X\}$$

(M_u)와 (M_v)의 최적해가 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 정리에 의해서 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$는 (P)의 최적해이다.

본 논문에서는 선형계획법 (M_u)와 (M_v)의 최적해중 하나가 그로벌 최적화문제 (P)의 최적해라는 것을 보였고 선형계획법 모델화를 위해서 주어진 다목적함수들 Cx과 문제 (P)의 목적함수 $d^T x$로 부터 관계식 $C^T(u-v) = d$을 유도하여 벡터 u, v를 구하는 방법을 제시하였다. 여기서 상수 A, B를 선택하는 방법에 대해 구체적으로 연구하여야 할 것이다.

참고문헌

[1] Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., Nonlinear Programming, Proceedings of the 2nd Berkely Symposium on Mathematical Statistics and probability, University of California Press, Berkely, California, pp. 481-492, 1950.

[2] Philip, J., Algorithms for the vector maximization problem, Mathematical programming, Vol.2, pp. 207-229, 1972.

[3] Evan, J. P., Steuer, R. E., A revised simplex method for linear multiple-objective programs, Mathematical Programming, Vol. 15, pp. 54-72, 1973.

[4] Isermann, H., Proper efficiency and the linear vector maximization problem, Operation Research, Vol. 22, pp. 189-191, 1974.

[5] Yu, P. L. and Zeleny, M., The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria simplex Method, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 49, pp. 430-468, 1975.

[6] Weistroffer, H. R., Careful usage of pessimistic values is needed in mutiple-objective optimization, Operation Research Letters, Vol. 4. pp. 23-25, 1985

[7] Isermann, H., Steuer, R. E., Computational experience concerning payoff tables and minimum criteria values over the efficient set, European Journal of Operational Research, Vol. 33, pp. 91-97, 1987.

[8] Steuer, R. E., Multiple-criteria optimization: Theory, Computation, and Application, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, pp. 147-159, 1989.

[9] Ecker, J. G., and Kouada, I.A. Finding Efficient Points for multiple-Objective Linear Programs, Mathematical Programming, Vol. 8, pp. 375-377, 1975.

[10] Ecker, J. G., and Kouada, I. A. Finding All Efficient Extreme Points for multiple-Objective Linear Programs, Mathematical Programming, Vol. 14, pp. 249-261, 1978.

[11] Ecker, J. G., Hegner, N. S., On computing an Initial Efficient Extreme Point, Operation Research, Vol. 26, pp. 1005-1007, 1978.

[12] Ecker, J. G., Hegner, N. S., Kouada, I. A., Generating All Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Programs, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 30, No. 3, pp. 353-380, 1980.

[13] Ecker, J. G., Song, J. H., Optimizing a Linear Function over an Efficient Set}, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 83, No. 3, pp. 541-563, 1994.

[14] Benson, H. P., An All Linear Programming Relaxation Algorithm for Optimizing over the Efficient Set, Journal of Global Optimization, Vol. 1, pp. 83-104, 1991.